

Franck Luthon

# Mathématiques pour l'électronique

Transformées intégrales et séries de Fourier  
avec exercices corrigés



ellipses

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Suite numérique</b>	<b>27</b>
1.1	Définition . . . . .	27
1.2	Limite . . . . .	28
1.3	Critères de convergence . . . . .	28
1.3.1	Théorème . . . . .	28
1.3.2	Suites adjacentes . . . . .	28
1.3.3	Critère de Cauchy . . . . .	28
1.4	Exemple fondamental . . . . .	29
1.5	Suite récurrente . . . . .	29
1.5.1	Définition . . . . .	29
1.5.2	Suite arithmétique . . . . .	29
1.5.3	Suite géométrique . . . . .	30
1.6	Raisonnement par récurrence . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Série numérique</b>	<b>31</b>
2.1	Définition - Propriété de convergence . . . . .	31
2.1.1	Série géométrique . . . . .	32
2.1.2	Condition nécessaire de convergence . . . . .	32
2.1.3	Condition de Cauchy . . . . .	32
2.1.4	Série absolument convergente . . . . .	33
2.2	Série à termes positifs . . . . .	33
2.2.1	CNS de convergence . . . . .	33
2.2.2	Comparaison entre séries . . . . .	33
2.2.2.1	Exemples de convergence . . . . .	33
2.2.2.2	Critère de convergence . . . . .	34
2.2.3	Comparaison de nature de série et d'intégrale généralisée . . . . .	34
2.2.4	Critère de Riemann : règle $n^\alpha u_n$ . . . . .	34
2.2.5	Comparaison entre série positive et série géométrique . . . . .	35
2.2.5.1	Théorème . . . . .	35
2.2.5.2	Critère de Cauchy . . . . .	35
2.2.5.3	Critère de d'Alembert . . . . .	35

	2.2.5.4	Exemples de convergence . . . . .	35
2.3		Série alternée . . . . .	36
	2.3.1	Définition . . . . .	36
	2.3.2	Théorème . . . . .	36
	2.3.2.1	Preuve . . . . .	36
	2.3.2.2	Exemple : série harmonique alternée . . . . .	36
	2.3.3	Règle d'Abel . . . . .	36
2.4		Résumé des méthodes . . . . .	37
2.5		Série entière . . . . .	37
	2.5.1	Définition . . . . .	37
	2.5.2	Rayon de convergence . . . . .	37
	2.5.2.1	Lemme d'Abel . . . . .	37
	2.5.2.2	Définition du rayon de convergence . . . . .	38
	2.5.3	Détermination du rayon de convergence . . . . .	38
	2.5.3.1	Critère de Cauchy . . . . .	38
	2.5.3.2	Règle de Cauchy . . . . .	38
	2.5.3.3	Critère de d'Alembert . . . . .	38
	2.5.3.4	Règle de d'Alembert . . . . .	38
<b>3</b>		<b>Développement en série de Fourier</b>	<b>39</b>
	3.1	Série trigonométrique . . . . .	40
	3.2	Théorème de Fourier . . . . .	40
	3.3	Condition de validité . . . . .	40
	3.4	Point de discontinuité (phénomène de Gibbs) . . . . .	41
	3.5	Fonction définie dans un intervalle quelconque . . . . .	41
	3.6	Terminologie . . . . .	42
	3.7	Propriétés de symétrie . . . . .	42
	3.7.1	Fonction paire . . . . .	42
	3.7.2	Fonction impaire . . . . .	43
	3.8	Formule de Bessel-Parseval . . . . .	43
	3.9	Définition de la valeur efficace . . . . .	43
	3.10	Intégration et dérivation . . . . .	44
	3.10.1	Intégration . . . . .	44
	3.10.2	Dérivation . . . . .	45
	3.11	Développement exponentiel complexe . . . . .	46
<b>4</b>		<b>Équation différentielle</b>	<b>47</b>
	4.1	Généralités . . . . .	47
	4.1.1	Définition . . . . .	47
	4.1.2	Théorème . . . . .	48
	4.2	Équation différentielle du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	48

4.2.1	Équation différentielle à variables séparables . . . . .	48
4.2.2	Équation différentielle homogène . . . . .	48
4.2.2.1	Définition . . . . .	48
4.2.2.2	Intégration par changement de fonction . . . . .	48
4.2.2.3	Changement de variable en coordonnées polaires . . . . .	49
4.2.3	Différentielle totale exacte . . . . .	49
4.2.3.1	Forme générale . . . . .	49
4.2.3.2	Intégration . . . . .	50
4.2.4	Équation différentielle linéaire . . . . .	50
4.2.4.1	Définition . . . . .	50
4.2.4.2	Méthode d'intégration . . . . .	50
4.2.4.3	Théorème . . . . .	51
4.3	Équation différentielle linéaire d'ordre $n$ . . . . .	51
4.3.1	Définition . . . . .	51
4.3.2	Équation sans second membre . . . . .	51
4.3.2.1	Théorème 1 . . . . .	51
4.3.2.2	Wronskien . . . . .	52
4.3.2.3	Théorème 2 . . . . .	52
4.3.2.4	Connaissance d'intégrales particulières . . . . .	52
4.3.2.5	Exemple . . . . .	52
4.3.3	Équation avec second membre . . . . .	53
4.3.3.1	Théorème . . . . .	53
4.3.3.2	Solution particulière : variation de la constante . . . . .	53
4.4	EDL à coefficients constants . . . . .	54
4.4.1	Solution générale sans 2 <sup>nd</sup> membre . . . . .	54
4.4.2	Solution particulière avec 2 <sup>nd</sup> membre . . . . .	55
4.4.3	Solution globale . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Fonction de la variable complexe</b> . . . . .	<b>57</b>
5.1	Nombre complexe . . . . .	57
5.1.1	Définition . . . . .	57
5.1.2	Somme . . . . .	58
5.1.3	Produit . . . . .	58
5.1.4	Quotient . . . . .	58
5.1.5	Complexe conjugué . . . . .	59
5.1.6	Racines $n$ -ièmes . . . . .	59
5.2	Fonction de la variable complexe . . . . .	59
5.2.1	Continuité . . . . .	59
5.2.2	Dérivabilité . . . . .	60
5.2.2.1	Exemple . . . . .	60
5.2.2.2	Contre-exemple . . . . .	60

5.2.3	Relations de Cauchy . . . . .	60
5.2.4	Réciproque . . . . .	60
5.2.5	Holomorphie et analyticité . . . . .	61
5.2.5.1	Définitions . . . . .	61
5.2.5.2	Propriétés . . . . .	61
5.2.5.3	Exemples de fonctions holomorphes . . . . .	61
5.2.5.4	Remarque . . . . .	62
5.2.6	Harmonicité . . . . .	62
5.2.7	Réciproque . . . . .	62
5.2.8	Point singulier . . . . .	62
5.2.8.1	Définition . . . . .	62
5.2.8.2	Singularité artificielle . . . . .	63
5.2.8.3	Pôle d'ordre $p$ . . . . .	63
5.2.8.3.1	Exemple : . . . . .	63
5.2.8.3.2	Définition : . . . . .	63
5.2.8.4	Point singulier essentiel . . . . .	63
5.2.8.5	Cas du point à l'infini . . . . .	63
5.2.9	Fonctions uniformes et multiformes . . . . .	64
5.2.10	Notion de point critique . . . . .	64
5.2.11	Exemple de la fonction racine . . . . .	64
5.2.12	Notion de coupure et choix d'une détermination . . . . .	65
5.2.12.1	Exemple 1 : $f(z) = \sqrt{z}$ . . . . .	66
5.2.12.2	Exemple 2 : $Z = f(z) = z^{1/n}$ . . . . .	67
5.2.12.3	Exemple 3 : $Z = \log z$ . . . . .	67
5.2.13	Définition générale de la notion de point critique . . . . .	68
5.2.13.1	Points critiques des fonctions élémentaires . . . . .	68
5.2.13.2	Généralisation aux autres fonctions multiformes . . . . .	68
5.2.13.3	Cas du point à l'infini . . . . .	68
5.2.13.4	Cas des pôles et des zéros . . . . .	68
5.2.13.5	Exemple 1 . . . . .	68
5.2.13.6	Exemple 2 . . . . .	69
5.3	Fonction définie par une série entière . . . . .	69
5.3.1	Série de la variable complexe . . . . .	69
5.3.2	Convergence absolue . . . . .	69
5.3.3	Rappel sur la convergence des séries . . . . .	69
5.3.3.1	Condition nécessaire de convergence . . . . .	70
5.3.3.2	Théorème de Cauchy . . . . .	70
5.3.3.3	Critère de Cauchy . . . . .	70
5.3.3.4	Critère de d'Alembert . . . . .	70
5.3.3.5	Comparaison avec une intégrale . . . . .	70
5.3.3.6	Série de Riemann . . . . .	71

5.3.4	Convergence uniforme . . . . .	71
5.3.4.1	Théorème de Cauchy . . . . .	71
5.3.4.2	Règle de Weierstrass . . . . .	71
5.3.4.3	Convergence absolue $\Rightarrow$ Convergence uniforme	71
5.3.4.4	Critère d'Abel . . . . .	71
5.3.4.5	Intégration d'une série CU . . . . .	72
5.3.5	Série entière de la variable complexe . . . . .	72
5.3.5.1	Définition . . . . .	72
5.3.5.2	Convergence . . . . .	72
5.3.5.3	Théorème . . . . .	72
5.3.5.4	Cas particulier . . . . .	73
5.3.5.5	Généralisation . . . . .	73
5.3.6	Développement en série de Taylor . . . . .	73
5.3.6.1	Développement de Mac-Laurin . . . . .	73
5.3.6.2	Fonction analytique . . . . .	73
5.3.7	Fonctions entières . . . . .	74
5.3.7.1	Fonction exponentielle $f(z) = e^z$ . . . . .	74
5.3.7.2	Fonctions trigonométriques . . . . .	74
5.3.7.3	Fonctions hyperboliques . . . . .	74
5.3.7.3.1	Remarque . . . . .	75
5.3.7.3.2	Possibilité d'avoir $\cos z > 1$ . . . . .	75
5.3.8	Série géométrique et fonction $\log(1 + z)$ . . . . .	75
5.3.9	Convention . . . . .	75
5.4	Intégration de fonctions de la variable complexe . . . . .	75
5.4.1	Intégrale de Cauchy . . . . .	75
5.4.1.1	Définition . . . . .	75
5.4.1.2	Intégration des séries . . . . .	76
5.4.2	Théorème de Cauchy . . . . .	77
5.4.3	Notion de primitive . . . . .	77
5.4.3.1	Théorème . . . . .	78
5.4.3.2	Preuve . . . . .	78
5.4.4	Formule de Cauchy . . . . .	79
5.4.5	Développement de $f(z)$ holomorphe en série entière . . .	80
5.4.5.1	Développement en série entière sur un contour	80
5.4.5.2	Existence des dérivées . . . . .	82
5.5	Théorème des résidus . . . . .	82
5.5.1	Développement en série de Laurent en un point singulier	82
5.5.2	Preuve . . . . .	83
5.5.3	Cas d'un pôle d'ordre $p$ . . . . .	84
5.5.4	Théorème des résidus . . . . .	84
5.5.4.1	Résidu d'une fonction uniforme . . . . .	84

5.5.4.2	Théorème des résidus . . . . .	84
5.5.4.3	Calcul de résidus . . . . .	85
5.5.4.3.1	Cas d'un pôle simple . . . . .	85
5.5.4.3.2	Pôle multiple : . . . . .	86
5.5.4.3.3	Cas d'un point singulier essentiel : . . . . .	86
5.5.4.3.4	Résidu au voisinage de l'infini : . . . . .	86
5.5.4.4	Extension du théorème des résidus . . . . .	87
5.5.4.4.1	Cas d'un nombre fini de singularités . . . . .	87
5.5.4.4.2	Cas d'une fraction rationnelle : . . . . .	88
5.6	Application au calcul d'intégrales finies . . . . .	88
5.6.1	Théorème 1 . . . . .	88
5.6.2	Théorème 2 . . . . .	89
5.6.3	Lemme 1 de Jordan . . . . .	89
5.6.4	Lemme 2 de Jordan . . . . .	89
5.6.5	Calcul d'intégrales définies (fonctions uniformes) . . . . .	89
5.6.5.1	Fraction rationnelle $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ . . . . .	89
5.6.5.2	Intégrale de fonction trigonométrique . . . . .	90
5.6.5.3	Intégrale renfermant une exponentielle complexe . . . . .	90
5.6.5.4	Fonction exponentielle $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} g(e^{kx}) dx$ . . . . .	91
5.6.6	Intégrales de fonctions multiformes . . . . .	92
5.6.6.1	Précaution et conseil . . . . .	92
5.6.6.2	Fonction racine $I = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ . . . . .	92
5.6.6.3	Racine et puissance non entière . . . . .	93
5.6.6.4	Fonction logarithme . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Transformée de Laplace</b> . . . . .	<b>95</b>
6.1	Intégrale de Laplace . . . . .	95
6.1.1	Définition . . . . .	95
6.1.2	Abscisse de convergence . . . . .	96
6.1.3	Quelques cas particuliers . . . . .	97
6.1.3.1	Fonction unité de Heaviside $\mathcal{U}(t)$ et $\mathcal{U}(t - t_0)$ . . . . .	97
6.1.3.2	Impulsion . . . . .	97
6.1.3.3	Impulsion de Dirac . . . . .	98
6.1.3.4	Fonction puissance $f(t) = t^\nu$ . . . . .	98
6.1.3.5	Fonction exponentielle $f(t) = e^{at}$ et $f(t) = t^n e^{at}$ . . . . .	99
6.2	Règles de Heaviside . . . . .	99
6.2.1	Linéarité . . . . .	99
6.2.2	Première règle de Heaviside . . . . .	99
6.2.3	Deuxième règle de Heaviside . . . . .	100
6.2.4	Applications . . . . .	100
6.2.4.1	Recherche de transformées . . . . .	100

	6.2.4.2	Recherche d'originaux . . . . .	100
6.3		Inversion de la transformée de Laplace . . . . .	101
	6.3.1	Définition de $\mathcal{U}(t)$ par une intégrale de Bromwich-Wagner	101
	6.3.2	Intégrale de Mellin-Fourier . . . . .	102
	6.3.3	Calcul de l'intégrale de Mellin-Fourier . . . . .	102
	6.3.3.1	Contour de Bromwich . . . . .	102
	6.3.3.2	Intégrale de Bromwich-Wagner . . . . .	102
	6.3.3.3	Lemme de Jordan généralisé . . . . .	102
	6.3.3.4	Contour équivalent . . . . .	103
	6.3.3.5	Principe de calcul . . . . .	103
	6.3.3.6	Exemple d'une fonction uniforme . . . . .	104
6.4		Règles opératoires du calcul symbolique . . . . .	104
	6.4.1	Dérivation et intégration par rapport à un paramètre . .	104
	6.4.2	Changement d'échelle . . . . .	105
	6.4.3	Translation de la variable concrète $t$ et symbolique $p$ . .	105
	6.4.4	Théorème du produit de Borel (convolution) . . . . .	105
	6.4.5	Dérivation et intégration par rapport à $t$ . . . . .	106
	6.4.6	Théorèmes de la valeur initiale et finale . . . . .	106
	6.4.7	Dérivation et intégration par rapport à la variable $p$ . .	106
6.5		Application de la TL : fonction de transfert . . . . .	107
	6.5.1	Système linéaire SLIT . . . . .	107
	6.5.2	Réponse impulsionnelle et convolution . . . . .	107
	6.5.3	Distribution de Dirac . . . . .	108
	6.5.4	Intérêt pour l'étude des systèmes . . . . .	108
	6.5.5	Réponse harmonique . . . . .	109
6.6		EDL à coefficients constants . . . . .	109
	6.6.1	Méthode classique . . . . .	110
	6.6.2	Méthode symbolique . . . . .	110
<b>7</b>		<b>Transformée de Fourier</b>	<b>111</b>
	7.1	Définition . . . . .	111
	7.2	Règles opératoires . . . . .	112
	7.2.1	Linéarité . . . . .	112
	7.2.2	Transposition . . . . .	112
	7.2.3	Conjugaison et hermiticité . . . . .	112
	7.2.4	Changement d'échelle . . . . .	113
	7.2.5	Translation de la variable concrète $t$ (règle du retard) . .	113
	7.2.6	Translation de la variable symbolique : règle de modulation	113
	7.2.7	Dérivation et intégration par rapport à $t$ . . . . .	114
	7.2.7.1	Généralisation . . . . .	114
	7.2.7.2	Intégration . . . . .	114

7.2.8	Dérivation par rapport à $\nu$ . . . . .	114
7.2.9	Théorème de convolution . . . . .	114
7.2.10	Formule de Parseval-Plancherel . . . . .	115
7.2.11	Égalité fondamentale et moyen mnémotechnique . . . . .	115
7.3	Relation entre TF et TL . . . . .	116
7.3.1	Cas où l'on suppose que $f(t) = f(t) \cdot \mathcal{U}(t)$ . . . . .	116
7.3.2	Transformée inverse . . . . .	116
7.3.3	Cas où $f(t) \neq 0$ pour $t < 0$ . . . . .	116
7.4	TF de quelques fonctions et distributions . . . . .	117
7.4.1	TF de $\delta(t - a)$ . . . . .	117
7.4.2	TF de $f(t) = 1$ au sens des distributions . . . . .	117
7.4.3	TF de $\exp(i2\pi at)$ . . . . .	118
7.4.4	TF des sinusoides $\cos(2\pi at)$ et $\sin(2\pi at)$ . . . . .	118
7.4.5	Fonctions propres de la TF . . . . .	118
7.4.5.1	Peigne $p(t)$ . . . . .	118
7.4.5.2	Loi de Laplace-Gauss . . . . .	118
<b>8</b>	<b>Transformée de Fourier discrète</b> . . . . .	<b>119</b>
8.1	Introduction . . . . .	119
8.2	Conversion analogique-numérique . . . . .	120
8.2.1	Échantillonnage et quantification . . . . .	120
8.2.2	Échantillonnage temporel . . . . .	120
8.3	Transformée de Fourier discrète . . . . .	123
8.3.1	TFDT d'un signal causal . . . . .	123
8.3.2	Troncature temporelle . . . . .	123
8.3.3	Pondération temporelle . . . . .	124
8.3.4	Échantillonnage fréquentiel - TFD . . . . .	126
<b>9</b>	<b>Transformée en Z</b> . . . . .	<b>131</b>
9.1	Introduction sur l'échantillonnage . . . . .	131
9.2	Rappel sur les distributions . . . . .	132
9.2.1	Fonction d'échantillonnage (peigne de Dirac) . . . . .	132
9.2.2	Fonction échantillonnée . . . . .	132
9.3	TL d'une fonction échantillonnée . . . . .	132
9.4	TZ des puissances de $t$ . . . . .	133
9.5	TZ de $f(t) \exp(-at)$ . . . . .	133
9.6	Théorème . . . . .	134
9.7	Translation temporelle . . . . .	134
9.7.1	Retard . . . . .	134
9.7.2	Avance . . . . .	134
9.8	Théorème de la valeur initiale . . . . .	135

9.9	Théorème de la valeur finale . . . . .	135
9.10	Formule d'inversion . . . . .	136
9.11	Propriété périodique de $\phi^*(p)$ et relation avec $\phi(p)$ . . . . .	137
9.12	Expression de $\phi^*(p)$ à l'aide des résidus . . . . .	138
9.13	Dérivation et intégration par rapport à un paramètre . . . . .	138
9.14	Théorème de Parseval . . . . .	139
9.15	Théorème de convolution discrète . . . . .	139
9.16	Conclusion générale sur les transformées . . . . .	140
<b>10</b>	<b>Traitement de signal analogique</b> . . . . .	<b>141</b>
10.1	Introduction . . . . .	141
10.1.1	Définition . . . . .	141
10.1.2	Système analogique . . . . .	141
10.2	Signal analogique . . . . .	143
10.2.1	Typologie . . . . .	143
10.2.2	Énergie et puissance . . . . .	143
10.2.3	Corrélation . . . . .	144
10.2.3.1	Autocorrélation . . . . .	144
10.2.3.2	Corrélateur analogique . . . . .	144
10.2.3.3	Intercorrélation . . . . .	145
10.2.4	Dualité temps-fréquence . . . . .	145
10.2.4.1	Durée utile - Support borné . . . . .	145
10.2.4.2	Spectre utile - Spectre borné . . . . .	146
10.2.4.3	Principe d'incertitude . . . . .	146
10.2.5	Signal à bande étroite . . . . .	146
10.2.5.1	Définition . . . . .	146
10.2.5.2	Signal analytique . . . . .	147
10.3	Filtre analogique . . . . .	147
10.3.1	Convolution . . . . .	147
10.3.1.1	Calcul de la sortie d'un filtre . . . . .	147
10.3.1.2	Chaînage de filtres . . . . .	148
10.3.2	Réponse impulsionnelle et fonction de transfert . . . . .	148
10.3.2.1	Filtre réalisable . . . . .	148
10.3.2.2	Filtre stable . . . . .	149
10.3.2.3	Filtres idéaux . . . . .	149
10.3.3	Relations fondamentales des filtres . . . . .	150
10.3.4	Filtre à bande étroite . . . . .	150
10.3.4.1	Définition . . . . .	150
10.3.4.2	Principe du changement de fréquence . . . . .	151
10.3.4.3	Amplificateur sélectif accordable . . . . .	151
10.3.4.4	Multiplexage en fréquence . . . . .	152

10.4	Applications . . . . .	152
10.4.1	Filtrage . . . . .	152
10.4.1.1	Passe-bas (intégrateur) . . . . .	152
10.4.1.2	Passe-haut (dérivateur) . . . . .	153
10.4.1.3	Passe-bande . . . . .	153
10.4.2	Modulation . . . . .	153
10.4.2.1	Modulation d'amplitude . . . . .	153
10.4.2.2	Démodulation . . . . .	154
10.4.2.3	Modulation de fréquence . . . . .	154
10.4.2.3.1	Fréquence instantanée : . . . . .	154
10.4.2.3.2	Spectre : . . . . .	154
10.4.2.3.3	Réalisation : . . . . .	155
10.4.2.3.4	Démodulation : . . . . .	155
10.4.2.4	Comparaison des modulations . . . . .	155
10.4.3	Analyse spectrale . . . . .	155
10.4.3.1	But . . . . .	155
10.4.3.2	Principe . . . . .	157
10.4.3.3	Mise en œuvre . . . . .	157
10.4.3.4	Résolution fréquentielle . . . . .	157
10.4.3.4.1	Pouvoir de résolution : . . . . .	157
10.4.3.4.2	Troncature temporelle : . . . . .	157
10.4.3.4.3	Exemple des audio-fréquences : . . . . .	158
10.5	Extensions . . . . .	158
<b>11</b>	<b>Traitement de signal numérique</b>	<b>159</b>
11.1	Introduction . . . . .	159
11.1.1	Généralités . . . . .	159
11.1.2	Outils mathématiques . . . . .	159
11.1.2.1	Transformée de Fourier discrète dans le temps	159
11.1.2.2	TFD et transformée en $Z$ . . . . .	160
11.1.3	Systèmes numériques . . . . .	160
11.1.3.1	Équation aux différences . . . . .	160
11.1.3.2	Produit de convolution discret . . . . .	161
11.1.3.3	Fonction de transfert . . . . .	161
11.2	Signaux numériques . . . . .	161
11.2.1	Les 4 opérations de base . . . . .	161
11.2.2	Signaux élémentaires et typologie . . . . .	161
11.2.3	Corrélation . . . . .	162
11.2.4	Échantillonnage . . . . .	162
11.2.4.1	Théorème de Shannon . . . . .	162
11.2.4.2	Échantillonnage naturel . . . . .	162

11.2.4.3	Échantillonneur-bloqueur . . . . .	163
11.2.5	Quantification . . . . .	163
11.3	Filtres numériques . . . . .	164
11.3.1	Causalité et stabilité . . . . .	164
11.3.2	Système SLIT . . . . .	164
11.3.3	Synthèse d'un filtre RIF . . . . .	165
11.3.4	Synthèse d'un filtre RII . . . . .	166
11.4	Filtrage . . . . .	167
11.4.1	Linéaire . . . . .	167
11.4.2	Non-linéaire . . . . .	167
11.5	Analyse spectrale . . . . .	167
11.5.1	Autocorrélation . . . . .	167
11.5.2	Méthode non-paramétrique . . . . .	168
11.5.3	Méthode paramétrique . . . . .	168
<b>12</b>	<b>Vade-mecum mathématique</b>	<b>171</b>
12.1	Trigonométrie . . . . .	171
12.2	Développements limités au voisinage de zéro . . . . .	174
12.3	Décomposition des fractions rationnelles . . . . .	175
12.4	Fonctions hyperboliques directes . . . . .	176
12.5	Fonctions hyperboliques réciproques . . . . .	177
12.6	Coniques . . . . .	178
12.7	Rappels élémentaires . . . . .	179
12.7.1	Rappel sur les complexes . . . . .	179
12.7.2	Dérivation . . . . .	180
12.7.3	Intégration . . . . .	181
12.8	Unités exprimées en décibels . . . . .	182
12.8.1	Unité de mesure de tension : le dBv . . . . .	182
12.8.2	Unité de mesure de puissance : le dBm . . . . .	182
12.8.3	Unité de gain (en tension ou courant) : le dB . . . . .	182
12.8.4	Remarque . . . . .	182
12.9	Distributions . . . . .	183
12.9.1	Définition . . . . .	183
12.9.2	Distribution de Dirac . . . . .	183
12.10	Développement en série de Fourier . . . . .	184
12.11	Tableau récapitulatif de la TL . . . . .	185
12.12	Tableau récapitulatif de la TF . . . . .	185
12.13	Tableau récapitulatif de la TZ . . . . .	185
12.14	Tableau synthétique des transformées . . . . .	185
12.15	Vade-mecum du calcul symbolique . . . . .	190
12.16	Vade-mecum pour la transformée de Fourier . . . . .	191

12.17	Vade-mecum sur la transformée en Z . . . . .	192
<b>13</b>	<b>Exercices</b>	<b>193</b>
13.1	Trigonométrie . . . . .	193
13.2	Nombre complexe . . . . .	193
13.3	Dérivation . . . . .	194
13.4	Intégration trigonométrique . . . . .	195
13.5	Équation différentielle . . . . .	196
13.6	Décomposition de fraction rationnelle . . . . .	196
13.7	Intégration . . . . .	196
13.8	Somme de Riemann . . . . .	197
13.9	Nature d'une suite par comparaison . . . . .	198
13.10	Suite associée . . . . .	198
13.11	Somme de cosinus et sinus d'arcs en progression arithmétique	198
13.12	Paradoxes grecs . . . . .	199
13.13	Suite définie implicitement . . . . .	199
13.14	Suite de Fibonacci . . . . .	199
13.15	Convergence d'une suite . . . . .	200
13.16	Suite récurrente . . . . .	200
13.17	Raisonnement assassin par récurrence . . . . .	200
13.18	Nature d'une série . . . . .	201
13.19	Série alternée . . . . .	201
13.20	Comparaison avec une intégrale . . . . .	202
13.21	Calcul de somme de série numérique . . . . .	202
13.22	Calcul de somme et de reste de série . . . . .	202
13.23	Rayon de convergence de série entière . . . . .	202
13.24	Convergence de série à termes positifs . . . . .	203
13.25	Série à termes positifs et négatifs . . . . .	203
13.26	Développement d'un signal carré . . . . .	203
13.27	Signal rectangulaire . . . . .	203
13.28	Signal triangulaire pair . . . . .	204
13.29	Redressement double alternance . . . . .	204
13.30	Signal en dents de scie . . . . .	204
13.31	Développement d'un signal triangulaire . . . . .	205
13.32	Signal d'un onduleur . . . . .	205
13.33	Série de Fourier et calcul de somme . . . . .	206
13.34	Démonstration de la formule de Wallis . . . . .	207
13.35	EDL du 1 <sup>er</sup> ordre : circuit RL série . . . . .	207
13.36	EDL du second ordre . . . . .	208
13.37	Circuit RLC parallèle . . . . .	208
13.38	Régime apériodique . . . . .	208

---

13.39	Propagation d'un virus . . . . .	209
13.40	Calcul de transformée de Laplace . . . . .	209
13.41	Résolution d'une équation différentielle . . . . .	210
13.42	Calcul d'un original . . . . .	210
13.43	Application électrique : circuit RC . . . . .	211
13.44	Circuit RLC série . . . . .	211
13.45	Généralisation de la notion d'impédance . . . . .	211
13.46	Étude de circuit . . . . .	211
13.47	Peigne de Dirac, convolution, échantillonnage . . . . .	212
13.48	Résolution d'équation différentielle . . . . .	212
13.49	Bode-Nyquist de fonctions élémentaires . . . . .	212
13.50	Fonction de transfert composée . . . . .	213
13.51	Amplificateur à résistance compensée . . . . .	213
13.52	Filtre correcteur à avance de phase . . . . .	213
13.53	Correcteur mécanique à avance de phase . . . . .	214
13.54	Calculs de transformée de Fourier . . . . .	215
13.55	Modulation d'amplitude et analyse spectrale . . . . .	216
13.56	Équation de diffusion de la chaleur . . . . .	216
13.57	Filtrage numérique . . . . .	217
13.58	Transformation en Z directe et inverse . . . . .	217
13.59	Échantillonnage . . . . .	218
13.60	Résolution d'équation de récurrence par la TZ . . . . .	218
13.61	Transformée de Laplace . . . . .	218
13.62	Transformée de Fourier . . . . .	219
13.63	Transformée en Z . . . . .	221
13.64	Transformée de Laplace . . . . .	221
13.65	Transformée en Z . . . . .	222
13.66	Calcul de transformées de Laplace . . . . .	222
13.67	Calcul d'un original . . . . .	223
13.68	Étude d'une fonction périodique . . . . .	223
13.69	Transformée de Fourier . . . . .	224
13.70	Série entière . . . . .	224
13.71	Décomposition en série de Fourier . . . . .	225
13.72	Transformée de Laplace : équation différentielle . . . . .	225
13.73	Transformée de Fourier : signal triangle . . . . .	226
13.74	DSF alternance positive . . . . .	226
13.75	Reconstitution d'un signal échantillonné : TFD . . . . .	226
13.76	TL : circuit RL série excité par une rampe . . . . .	228
13.77	Développement en série de Fourier . . . . .	229
13.78	Application de la transformée de Laplace . . . . .	230
13.79	Calcul d'une transformée de Fourier . . . . .	230

13.80	Échelons de Heaviside . . . . .	231
13.81	Originaux de Laplace . . . . .	232
13.82	Images de Laplace . . . . .	233
13.83	Différentielles par Laplace . . . . .	233
13.84	Transformée de Fourier d'une sinusoïde amortie . . . . .	233
13.85	Développement en série de Fourier . . . . .	233
13.86	Transformée de Laplace . . . . .	234
13.87	Transformée de Laplace : équation différentielle . . . . .	234
13.88	Développement en série de Fourier . . . . .	235
13.89	Transformée de Fourier : signal triangulaire . . . . .	235
13.90	Transformée de Fourier . . . . .	236
13.91	Série de Fourier : application en analyse spectrale . . . . .	236
13.92	Calcul de la somme d'une série numérique . . . . .	237
13.93	Étude d'un système du 1 <sup>er</sup> ordre par TL . . . . .	238
13.94	Série de Fourier : étude de pompe à pistons . . . . .	239
13.95	Transformée de Laplace : étude de cuve de mélange . . . . .	241
13.96	Oscillateur excité par un signal carré : DSF . . . . .	243
13.97	Signal radar . . . . .	244
13.98	Corrélateur analogique . . . . .	245
13.99	Synthèse d'un filtre RII . . . . .	245
13.100	Calcul de filtre réjecteur électronique . . . . .	247
<b>14</b>	<b>Travaux pratiques</b>	<b>249</b>
14.1	Introduction à Matlab . . . . .	249
14.1.1	Principales caractéristiques . . . . .	249
14.1.2	Environnement de travail . . . . .	250
14.1.2.1	Session Matlab . . . . .	250
14.1.2.2	Contrôle de session . . . . .	251
14.1.3	Langage de programmation . . . . .	252
14.1.3.1	Principe de la syntaxe . . . . .	252
14.1.3.2	Exemples d'instructions . . . . .	252
14.1.3.3	Opérateurs et constantes . . . . .	253
14.1.3.4	Contrôle de flux de données . . . . .	253
14.1.3.5	Création d'une fonction externe . . . . .	253
14.1.4	Bibliothèque de fonctions . . . . .	254
14.1.4.1	Fonctions graphiques . . . . .	254
14.1.4.2	Interaction utilisateur . . . . .	254
14.1.4.3	Interaction avec fichiers externes . . . . .	255
14.1.4.4	Manipulation de matrices . . . . .	255
14.1.4.5	Fonctions mathématiques . . . . .	255
14.1.4.6	Signaux de base . . . . .	255

---

14.2	Séance d'initiation . . . . .	256
14.2.1	Manipulation de matrices . . . . .	256
14.2.2	Manipulation de polynômes . . . . .	256
14.2.3	Représentation graphique d'un signal temporel . . . . .	257
14.2.4	Visualisation 3D et affichage d'image . . . . .	257
14.3	Calcul et affichage du DSF d'une fonction . . . . .	257
14.4	Équations différentielles . . . . .	258
14.4.1	Toolbox Symbolic Math . . . . .	258
14.4.2	ED Linéaire du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	258
14.4.3	ED Linéaire du 2 <sup>e</sup> ordre . . . . .	258
14.4.4	Circuit RLC parallèle . . . . .	261
14.5	Transformée de Laplace . . . . .	261
14.5.1	Rappels et définition . . . . .	261
14.5.2	Calculs de quelques TL usuelles . . . . .	261
14.5.3	Résolution d'équation différentielle linéaire . . . . .	262
14.6	Fonction de transfert . . . . .	262
14.6.1	Rappels . . . . .	262
14.6.2	Amplificateur à résistance compensée . . . . .	262
14.7	Transformée de Fourier . . . . .	263
14.7.1	Rappels . . . . .	263
14.7.2	TF continue : fonctions usuelles . . . . .	264
14.7.3	TF discrète : analyse spectrale . . . . .	264
14.7.3.1	Étude du théorème de Shannon . . . . .	264
14.7.3.2	Influence de la troncature temporelle . . . . .	265
14.7.3.3	Étude de l'écrêtage . . . . .	265
14.7.4	Annexes . . . . .	265
14.7.4.1	Signaux tests . . . . .	265
14.7.4.2	Fonctions internes . . . . .	266
14.7.4.3	Fonctions externes . . . . .	266
14.8	Transformée en Z . . . . .	267
14.8.1	Rappel sommaire . . . . .	267
14.8.2	Fonctions usuelles . . . . .	267
14.8.3	Filtre numérique RII . . . . .	267
14.8.3.1	Conception de filtre numérique par TZ . . . . .	268
14.8.3.2	Addendum théorique . . . . .	269
14.9	Filtrage de signaux . . . . .	270
14.9.1	Filtrage par moyennage . . . . .	270
14.9.2	Filtrage par troncature du spectre . . . . .	270
14.9.3	Simulations . . . . .	271
14.10	Programmation alternative avec Scilab . . . . .	272
14.11	Simulateur des exercices . . . . .	272

14.12	Simulateur complémentaire . . . . .	272
<b>15</b>	<b>Solution des exercices</b>	<b>273</b>
15.1	Corrigé du 13.1 Trigonométrie . . . . .	273
15.2	Corrigé du 13.2 Complexe . . . . .	273
15.3	Corrigé du 13.3 Dérivation . . . . .	274
15.4	Corrigé du 13.4 Intégration . . . . .	275
15.5	Corrigé du 13.5 EDL . . . . .	276
15.6	Corrigé du 13.6 Fraction rationnelle . . . . .	276
15.7	Corrigé du 13.7 Intégrale . . . . .	277
15.8	Corrigé du 13.8 Riemann . . . . .	278
15.9	Corrigé du 13.9 Suite . . . . .	279
15.10	Corrigé du 13.10 Suite associée . . . . .	280
15.11	Corrigé du 13.11 Somme de sinusoides . . . . .	280
15.12	Corrigé du 13.12 Grecs . . . . .	281
15.13	Corrigé du 13.13 Suite homographique . . . . .	282
15.14	Corrigé du 13.14 Fibonacci . . . . .	283
15.15	Corrigé du 13.15 Convergence . . . . .	284
15.16	Corrigé du 13.16 Suite récurrente . . . . .	285
15.17	Corrigé du 13.17 Assassin . . . . .	285
15.18	Corrigé du 13.18 Convergence de série . . . . .	286
15.19	Corrigé du 13.19 Série alternée . . . . .	288
15.20	Corrigé du 13.20 Série comparée . . . . .	288
15.21	Corrigé du 13.21 Somme . . . . .	289
15.22	Corrigé du 13.22 Reste . . . . .	289
15.23	Corrigé du 13.23 Rayon . . . . .	290
15.24	Corrigé du 13.24 Cauchy-Alembert . . . . .	291
15.25	Corrigé du 13.25 Convergence de série . . . . .	292
15.26	Corrigé du 13.26 Carré . . . . .	292
15.27	Corrigé du 13.27 Rectangle . . . . .	292
15.28	Corrigé du 13.28 Triangle pair . . . . .	294
15.29	Corrigé du 13.29 Double alternance . . . . .	294
15.30	Corrigé du 13.30 Scie . . . . .	295
15.31	Corrigé du 13.31 Triangle . . . . .	295
15.32	Corrigé du 13.32 Onduleur . . . . .	296
15.33	Corrigé du 13.33 Créneaux . . . . .	297
15.34	Corrigé du 13.34 Wallis . . . . .	300
15.35	Corrigé du 13.35 Circuit RL série . . . . .	301
15.36	Corrigé du 13.36 EDL du 2 <sup>nd</sup> ordre . . . . .	302
15.37	Corrigé du 13.37 Circuit RLC parallèle . . . . .	303
15.38	Corrigé du 13.38 Mode aperiodique . . . . .	303

---

15.39	Corrigé du 13.39	Virus . . . . .	304
15.40	Corrigé du 13.40	Calcul de TL . . . . .	305
15.41	Corrigé du 13.41	EDL du 2 <sup>nd</sup> ordre . . . . .	305
15.42	Corrigé du 13.42	Calcul d'un original . . . . .	305
15.43	Corrigé du 13.43	Circuit RC par TL . . . . .	305
15.44	Corrigé du 13.44	Circuit RLC par TL . . . . .	306
15.45	Corrigé du 13.45	Impédance . . . . .	307
15.46	Corrigé du 13.46	Circuit . . . . .	308
15.47	Corrigé du 13.47	Peigne . . . . .	309
15.48	Corrigé du 13.48	TL pour EDLCC . . . . .	310
15.49	Corrigé du 13.49	Bode Nyquist simple . . . . .	310
15.50	Corrigé du 13.50	Bode composé . . . . .	311
15.51	Corrigé du 13.51	Amplificateur . . . . .	312
15.52	Corrigé du 13.52	Avance . . . . .	313
15.53	Corrigé du 13.53	Piston . . . . .	313
15.54	Corrigé du 13.54	Porte . . . . .	315
15.55	Corrigé du 13.55	Modulation . . . . .	316
15.56	Corrigé du 13.56	Chaleur . . . . .	317
15.57	Corrigé du 13.57	Filtre numérique . . . . .	319
15.58	Corrigé du 13.58	TZ . . . . .	321
15.59	Corrigé du 13.59	Échantillonnage . . . . .	322
15.60	Corrigé du 13.60	TZ . . . . .	323
15.61	Corrigé du 13.61	Transformée de Laplace . . . . .	324
15.62	Corrigé du 13.62	Transformée de Fourier . . . . .	325
15.63	Corrigé du 13.63	Transformée en Z . . . . .	326
15.64	Corrigé du 13.64	Filtre du 2 <sup>e</sup> ordre . . . . .	326
15.65	Corrigé du 13.65	TZ . . . . .	327
15.66	Corrigé du 13.66	TL . . . . .	328
15.67	Corrigé du 13.67	Original . . . . .	328
15.68	Corrigé du 13.68	Périodique . . . . .	328
15.69	Corrigé du 13.69	Passe-bas . . . . .	329
15.70	Corrigé du 13.70	Série entière . . . . .	330
15.71	Corrigé du 13.71	DSF . . . . .	330
15.72	Corrigé du 13.72	EDLCC d'ordre 2 . . . . .	331
15.73	Corrigé du 13.73	TF d'un triangle . . . . .	331
15.74	Corrigé du 13.74	Alternance positive . . . . .	332
15.75	Corrigé du 13.75	Reconstitution par TFD . . . . .	332
15.76	Corrigé du 13.76	Circuit RL . . . . .	333
15.77	Corrigé du 13.77	Alternance négative . . . . .	333
15.78	Corrigé du 13.78	TL pour RL série . . . . .	335
15.79	Corrigé du 13.79	Exponentielle décroissante . . . . .	335

15.80	Corrigé du 13.80 Heaviside . . . . .	336
15.81	Corrigé du 13.81 Original . . . . .	337
15.82	Corrigé du 13.82 Image . . . . .	337
15.83	Corrigé du 13.83 Différentielle . . . . .	338
15.84	Corrigé du 13.84 Amorti . . . . .	338
15.85	Corrigé du 13.85 Alternance négative . . . . .	339
15.86	Corrigé du 13.86 TL système 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	339
15.87	Corrigé du 13.87 TL pour EDLCC . . . . .	340
15.88	Corrigé du 13.88 Scie impaire . . . . .	340
15.89	Corrigé du 13.89 Triangle . . . . .	340
15.90	Corrigé du 13.90 Transformée du triangle . . . . .	341
15.91	Corrigé du 13.91 Analyse spectrale par DSF . . . . .	341
15.92	Corrigé du 13.92 TL de fonction périodique . . . . .	341
15.93	Corrigé du 13.93 Circuit RC . . . . .	342
15.94	Corrigé du 13.94 Pompe . . . . .	343
15.95	Corrigé du 13.95 Lavinas . . . . .	345
15.96	Corrigé du 13.96 Vibration . . . . .	346
15.97	Corrigé du 13.97 Radar . . . . .	348
15.98	Corrigé du 13.98 Corrélateur . . . . .	350
15.99	Corrigé du 13.99 Filtre récursif . . . . .	353
15.100	Corrigé du 13.100 Filtre réjecteur . . . . .	356
<b>16 Solution des TP</b>		<b>359</b>
16.1	Délivrables attendus et critères d'évaluation . . . . .	359
16.2	Solution TP 14.2 Initiation . . . . .	360
16.3	Solution TP 14.3 DSF . . . . .	361
16.3.1	Programme Matlab . . . . .	361
16.3.2	Résultats . . . . .	363
16.4	Solution TP 14.4 Equations différentielles . . . . .	364
16.4.1	Programme Matlab . . . . .	364
16.4.2	Résultats graphiques . . . . .	365
16.5	Solution TP 14.5 TL . . . . .	365
16.5.1	Programme Matlab . . . . .	365
16.5.2	Solution de l'exercice de TP 14.5.3 . . . . .	366
16.6	Solution TP 14.6 Fonction de transfert . . . . .	366
16.6.1	Programme Matlab . . . . .	366
16.6.2	Résultats graphiques . . . . .	368
16.7	Solution TP 14.7 TF . . . . .	368
16.7.1	Programme Matlab . . . . .	368
16.7.2	Résultats graphiques . . . . .	369
16.7.3	Programme simulateur d'écrêtage . . . . .	369

---

16.7.4	Fonctions appelées . . . . .	370
16.8	Solution TP 14.8 TZ . . . . .	372
16.8.1	Programme et résultat . . . . .	372
16.8.2	Programme synthétiseur de filtre numérique . . . . .	374
16.9	Solution TP 14.9 Filtrage . . . . .	375
16.9.1	Programme Matlab . . . . .	375
16.9.2	Résultats graphiques . . . . .	376
16.9.3	Fonctions appelées . . . . .	376
16.10	Solution du 14.10 Alternative Scilab . . . . .	377
16.10.1	Programme de transformée de Fourier . . . . .	377
16.10.2	Programme Scilab pour DSF . . . . .	378
16.11	Solution du 14.11 Simulateur d'exercices . . . . .	381
16.12	Solution du 14.12 Complément de programmes . . . . .	387
16.12.1	Analyse spectrale . . . . .	387
16.12.2	Apodisation . . . . .	388
16.12.3	Modulation . . . . .	390
<b>Conclusion</b>		<b>391</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>393</b>
<b>Glossaire</b>		<b>397</b>
<b>Index</b>		<b>399</b>