Franck Luthon

Mathématiques pour l'électronique

Transformées intégrales et séries de Fourier avec exercices corrigés

ellipses

Chapitre 1

Suite numérique

Préambule

Les suites numériques sont des objets mathématiques qui revêtent une importance grandissante avec l'avènement technologique de l'informatique et des ordinateurs, dont l'usage généralisé conduit à la numérisation des informations et des signaux de notre vie quotidienne, qui deviennent alors des séquences de nombres, après échantillonnage et quantification.

On aborde dans ce chapitre les notions de base dont les mots-clés sont les suivants : terme général d'une suite, limite, convergence, divergence, suite majorée, minorée, suite récurrente, suite arithmétique, suite géométrique, raison d'une suite, somme partielle d'une suite [37, 31, 39].

1.1 Définition

On appelle suite à valeurs dans un ensemble E, la donnée d'une partie finie I de $\mathbb{N}$ et d'une application f :

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & I \longrightarrow E \\ & n \longrightarrow u_n \end{aligned} \tag{1.1}$$

u_n est appelé le terme général de la suite. Souvent on a : $E = \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{N}$.

Notation : la suite est notée $(u_n)_{n \in I}$.

Définitions :

— suite croissante : $\forall n \in I, u_{n+1} > u_n$

— suite décroissante : $\forall n \in I, u_{n+1} < u_n$

— suite majorée : $\exists\ M \in E \mid \forall n \in I, u_n < M$, ($M$ est appelé le majorant)

— suite minorée : $\exists\ m \in E \mid \forall n \in I, u_n > m$, ($m$ est alors le minorant).

1.2 Limite

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in I, (n \geq n_0) \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon \tag{1.2}$$

Propriété : il y a unicité de la limite (la preuve résulte du fait que $\mathbb{R}$ est séparé).

Définition de la convergence : si la suite $(u_n)_{n\in I}$ admet pour limite ℓ, avec $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ converge vers ℓ. On note :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$

Dans tous les autres cas, on dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ diverge. **§13.15**

1.3 Critères de convergence

1.3.1 Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) ; alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. **§13.16**

1.3.2 Suites adjacentes

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ croît} \\ (v_n) \text{ décroit} \\ \lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

Théorème : deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

1.3.3 Critère de Cauchy

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait au critère de Cauchy [32] si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geq n_0, p \geq n_0) \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon$$

Théorème : on a l'équivalence (la preuve résulte du fait que $\mathbb{R}$ est complet) :
la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\Leftrightarrow$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

1.4 Exemple fondamental

Soit $\alpha > 0$. On pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Alors :

$$\begin{array}{lll} \text{si :} & \alpha > 1, & (u_n) \text{ converge} \\ \text{si :} & 0 < \alpha \leq 1, & (u_n) \text{ diverge} \end{array}$$

Preuve : elle s'établit en quatre étapes $\boxed{\textbf{§13.8}}$.

1. u_n croît car : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$
2. cas $\alpha > 1$: on majore la somme par une intégrale convergente,
3. cas $0 < \alpha \leq 1$: on minore la somme par une intégrale divergente,
4. cas $\alpha = 1$: d'après 3, $u_n \geq \log(n+1)$ donc u_n ne peut être borné.

$\boxed{\textbf{§13.9}}$

1.5 Suite récurrente

1.5.1 Définition

Une suite récurrente est définie par la donnée d'une valeur initiale a et d'une équation itérative :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Théorème : si f est continue et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\boxed{f(\ell) = \ell}$.

— récurrence affine :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r.u_n + a \end{cases}$$

— récurrence homographique : $u_{n+1} = \frac{a.u_n + b}{c.u_n + d}$ avec $c \neq 0$ $\boxed{\textbf{§13.13}}$

— récurrence linéaire à deux termes : $u_{n+1} = a.u_n + b.u_{n-1}$ $\boxed{\textbf{§13.14}}$.

1.5.2 Suite arithmétique

C'est un cas particulier de suite récurrente où l'on ajoute, à chaque itération, une quantité identique r, appelée la raison de la suite [3] :

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ donné} \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad u_n = n.r + a$$

Formule fondamentale : la somme partielle d'une suite arithmétique vaut

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} u_n = (N+1)\left(a + \frac{Nr}{2}\right)} \tag{1.3}$$

Moyen mnémotechnique : On constate que c'est la moyenne des 2 termes extrêmes, multipliée par le nombre de termes de la somme partielle.

1.5.3 Suite géométrique

C'est un cas particulier de suite récurrente où l'on multiplie, à chaque itération, par une quantité identique r, appelée là aussi la raison :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = a \text{ donné} \\ u_n = r.u_{n-1} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad u_n = r^n.a$$

Formule fondamentale [1] : la somme partielle d'une suite géométrique vaut

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} u_n = a\frac{1-r^{N+1}}{1-r}} \tag{1.4}$$

§13.10 **§13.11**

1.6 Raisonnement par récurrence

La technique de démonstration par récurrence d'une formule mathématique portant sur un indice entier n est fréquemment utilisée, notamment pour les propriétés des suites numériques. Le raisonnement par récurrence consiste en trois étapes pour démontrer la vérité d'une propriété P, qui est fonction de l'indice n :

1. On montre que la propriété P est vraie pour un indice initial n_0 (typ. $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$) : P_{n_0} vraie.
2. Supposant la propriété P vraie au rang n, on démontre que cela implique qu'elle est aussi vraie au rang $n+1$: $P_n \Rightarrow P_n + 1$
3. On en conclut alors qu'elle est vraie $\forall n > n_0$.

§13.3 **§13.17**

1. Mon prof de math sup, M. Grivaux, affirmait que cette formule mathématique est la découverte scientifique la plus importante depuis l'invention de la roue, et je ne suis pas loin de partager son avis.

Chapitre 2

Série numérique

Préambule

Une série numérique est une suite de sommes partielles ; c'est donc l'équivalent, en numérique, de la notion d'intégrale d'une fonction en analogique. En effet, une intégrale s'approxime numériquement comme la somme de petits rectangles élémentaires (cf. définition de l'intégrale de Riemann comme limite sur de petits intervalles de l'aire sous la courbe d'une fonction). Les séries de Fourier seront le point d'orgue de ce concept, trouvant application principalement pour l'analyse harmonique d'un signal électrique ou mécanique (distorsion du courant électrique, analyse vibratoire de machine tournante etc.)

Les mots-clés de ce chapitre sont : série de Riemann, somme d'une série, convergence, divergence, série alternée, série à termes positifs, série harmonique, série géométrique, convergence absolue, somme partielle, série entière, rayon de convergence, Cauchy, critère de d'Alembert, règle d'Abel [22].

2.1 Définition - Propriété de convergence

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On lui associe la suite des sommes partielles :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, alors on dit que la série (u_n) converge.
§13.21

2.1.1 Série géométrique

Soit $a \in \mathbb{C}^*, r \in \mathbb{C}$. La $\boxed{\text{série } (a.r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow |r| < 1}$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a.r^n = \frac{a}{1-r} \tag{2.1}$$

r est appelée la raison géométrique. **§13.12**

A contrario, toute série géométrique de raison $r \geq 1$ diverge.

2.1.2 Condition nécessaire de convergence

Une condition nécessaire (CN) est que :
la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (CV) $\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.
N.B. : Ce n'est pas une condition suffisante, mais une simple implication.

Preuve : elle vient du fait que $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Exemple : soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{k}{4k-3}$$

On a : $|S_n - S_{n-1}| = |u_n| = \frac{n}{4n-3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow$ la série diverge.

Contre-exemple : considérons la série harmonique $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.
On a bien : $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, mais on ne peut pas conclure pour autant que la série converge.

2.1.3 Condition de Cauchy

On a l'équivalence (CNS) : la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV $\Leftrightarrow$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV.
Donc le critère du § 1.3.3 $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall q > p > n_0, ||S_q - S_p|| < \varepsilon$.
Or : $S_q - S_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_q$,
d'où la condition de Cauchy sur les séries : la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
$\Leftrightarrow \boxed{\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid (q > p > n_0) \Rightarrow |u_{p+1} + \ldots + u_q| < \varepsilon}$

Preuve : elle résulte du fait que l'ensemble $E = \mathbb{R}$ est un EVN complet.

Contre-exemple : série harmonique

On a : $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.
La condition n'est pas respectée dans ce cas : donc la série diverge.

2.1.4 Série absolument convergente

On a l'implication : la série $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow$ la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Car, selon l'inégalité fondamentale Eq.(5.2), p. 58 :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \tag{2.2}$$

N.B. : Si $\sum(u_n)$ converge alors que $\sum|u_n|$ diverge, on parle de **semi-convergence**. C'est le cas de la série harmonique alternée.

2.2 Série à termes positifs $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

2.2.1 CNS de convergence

Considérons la somme partielle : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante. Pour qu'elle converge, il faut et il suffit qu'elle soit majorée, c'est-à-dire que :
$\exists A \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq A$.
D'où la CNS : $\boxed{\text{série } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow \text{suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ majorée}}$

2.2.2 Comparaison entre séries

Soient deux séries (u_n) et (v_n).

- si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \neq 0$, alors (u_n) et (v_n) sont de même nature.
- si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et si la série $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- si : $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq v_n$, alors on a les implications :
  série (v_n) converge $\Rightarrow$ série (u_n) converge (CV),
  série (u_n) diverge $\Rightarrow$ série (v_n) diverge (DIV).

2.2.2.1 Exemples de convergence

1) $u_n = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} < v_n = \mathrm{e}^{-n} = \frac{1}{\mathrm{e}^n}$

2) $u_n = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{2^n} < v_n = \frac{1}{2^n}$

2.2.2.2 Critère de convergence

Hypothèse :
$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0, u_n > 0$ et $v_n > 0$ et $\exists n_1 \geq n_0 \mid \forall n > n_1, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$
Conclusion : alors on a les implications
série $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV $\Rightarrow$ série (u_n) CV
série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ DIV $\Rightarrow$ série (v_n) DIV

2.2.3 Comparaison de nature de série et d'intégrale généralisée

Hypothèses : soit une fonction f

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ & x \quad \longrightarrow f(x) > 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

— f décroissante sur $[a, +\infty[$, où $a > 0$,

— f localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$,

— $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,

— On définit : $u_n = f(n) \geq 0$.

Alors : $\boxed{\text{la série } \sum(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et l'intégrale } \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ sont de même nature.}}$

§13.8 **§13.20**

Preuve : On a l'encadrement (illustré par la Fig. 15.2 p. 279) :

$$u_1 + \cdots + u_{n+1} \leq \int_0^{n+1} f(x)dx \leq u_0 + \cdots + u_n \tag{2.4}$$

2.2.4 Critère de Riemann : règle $n^\alpha u_n$

La série de Riemann est définie par : $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, avec$\alpha > 0$.
On a vu en section 1.4 que : $\boxed{\text{série } \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > 1}$ **§13.12**
D'où l'énoncé de la règle : soit une série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On forme $v_n = n^\alpha u_n$. On cherche un α tel que : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = \ell}$, $\ell \geq 0$.

Alors : $\boxed{u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{\ell}{n^\alpha}}$ donc : $\boxed{\begin{cases} \text{si } \alpha > 1, (u_n) \text{ CV} \\ \text{si } \alpha \leq 1, (u_n) \text{ DIV} \end{cases}}$