

MP
Physique · Modélisation · Chimie
2018

Sous la coordination de

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Louis SALKIN
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Virgile ANDREANI
ENS Ulm

Nicolas COURRIER
professeur en CPGE

Olivier FRANTZ
professeur agrégé en école d'ingénieurs

Raphaël GALICHER
enseignant-chercheur à l'université

Amélie GAY
ENS Lyon

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE

Augustin LONG
ENS Lyon

Pierre MONTEILLER
ENS Ulm

Tom MOREL
professeur en CPGE

Louis SALKIN
professeur en CPGE

Vincent WIECZNY
ENS Lyon

Sommaire thématique de physique

2015 – 2018

CCP MP Physique				••	•		•			••	••	••
CCP MP Physique et Chimie	••	••			•		••			•	•	
CCP PC Physique	•	•		••			••	••		••	••	••
CCP PC Modélisation Phys-Chimie	•	•		•								
CCP PSI Physique et Chimie	••	•		•	••	•	•	•	•	••	•	
CCP PSI Modélisation numérique	•	••			•	•				•		
Centrale MP Physique et Chimie 1	•	•	•	•	•		••			••		••
Centrale MP Physique et Chimie 2	•			••	•		••			•	••	
Centrale PC Physique 1				•	•			••	••	••	•	
Centrale PC Physique 2	••	•	•	••	•		••	•	••		••	••
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•			••	•	••	••			••		
Centrale PSI Physique et Chimie 2	••	•			••	•	••	••	•	••	•	
Mines MP Physique 1	•				•		••		•	••		•
Mines MP Physique 2	••		••	••			••			•		••
Mines PC Physique 1	•				•		••	••	•	••		
Mines PC Physique 2	••	•		•			••	••	••	•	•	••
Mines PSI Physique 1	•				•		••	••	•	••		
Mines PSI Physique 2	•					••	•	•	•	••		
X/ENS MP Physique	•		•				••		•	•	•	
X/ENS MP Physique et SI	•	•			•		••		•	•	•	•
X/ENS PC Physique A	•				•		••	•		••	••	•
X/ENS PC Physique B				••			••	••	•	••		
X/ENS PSI Physique	•	••		••	••	••	••	•	•	••		•
X/ENS PSI Physique-Modélisation	•				••	••	••	••		••		
	Thermodynamique générale	Phénomènes diffusifs	Physique statistique	Électrostatique et magnétostatique	Électronique	Conversion de puissance	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	Électromagnétisme	Optique	Physique quantique

Sommaire

Énoncé
Corrigé

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

Physique	Questionnements et découvertes autour de l'atome le plus simple de l'univers. <i>mécanique classique, mécanique quantique, optique ondulatoire, magnétisme</i>	11	27
Physique et Chimie	Objectif Lune. <i>mécanique, optique ondulatoire, physique des plasmas, thermodynamique, bases de données, cristallographie, courbes courant-potentiel, thermochimie, oxydoréduction</i>	40	54

CENTRALE-SUPÉLEC

Physique et Chimie 1	Étude de la couronne solaire. <i>thermodynamique, mécanique, électromagnétisme, physique des plasmas, thermochimie, cinétique chimique, solutions aqueuses</i>	74	82
Physique et Chimie 2	Géophysique de la planète Terre. <i>gravitation, mécanique du point, électrostatique</i>	100	109

MINES-PONTS

Physique 1	Interaction laser plasma à haut éclairage. <i>mécanique classique, électromagnétisme, physique des plasmas</i>	123	133
Physique 2	Et pour un neutron de plus... <i>mécanique quantique, thermodynamique statistique</i>	152	159
Chimie	Le bioéthanol. <i>thermodynamique, oxydoréduction, diagrammes E-pH, cristallographie</i>	172	179

POLYTECHNIQUE-ENS

Physique	Étude du dispositif de propulsion du lanceur Ariane 5. <i>thermodynamique, mécanique</i>	189	196
Physique et Sciences de l'Ingénieur	Étude d'un fusible réarmable. Étude du flambement d'une membrane fine gonflée. <i>diffusion thermique, électrocinétique, énergétique, statique, transformée de Laplace</i>	208	219

FORMULAIRES

Constantes chimiques	248
Constantes physiques	251
Formulaire d'analyse vectorielle	252
Classification périodique	256

Sommaire thématique de chimie

2015 – 2018

CCP MP Physique et Chimie											
CCP PC Chimie											
CCP PC Modélisation Phys-Chimie											
CCP PSI Physique et Chimie											
Centrale MP Physique et Chimie 1											
Centrale MP Physique et Chimie 2											
Centrale PC Chimie											
Centrale PSI Physique et Chimie 1											
Centrale PSI Physique et Chimie 2											
Mines MP Chimie											
Mines PC Chimie											
Mines PSI Chimie											
X/ENS PC Chimie											
	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-pH	Courbes courant-potentiel	Thermodynamique	Mélanges binaires	Chimie organique	Orbitales moléculaires	Chimie de coordination

SESSION 2018

MPPH008

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP****PHYSIQUE****Vendredi 4 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

L'énoncé de cette épreuve comporte 16 pages, dont 3 pages d'annexe.

Questionnements et découvertes autour de l'atome le plus simple de l'univers

Dans ce sujet, on propose d'étudier quelques étapes clés de l'étude des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Le problème est constitué de 7 parties, quasiment indépendantes, même s'il y a un fil conducteur entre elles. Il est conseillé au candidat de faire une première lecture rapide du sujet afin d'en retirer une vue d'ensemble. Les paragraphes rédigés en italique donnent des explications permettant de situer chaque partie dans son contexte scientifique historique, avec leurs hypothèses d'étude.

Les constantes fondamentales intervenant dans le problème sont rappelées ci-dessous avec leurs valeurs numériques données avec 5 chiffres significatifs :

- charge élémentaire : $e = 1,6022 \cdot 10^{-19}$ C
- charge de l'électron : $-e$
- charge du proton : $+e$
- masse de l'électron : $m_e = 9,1094 \cdot 10^{-31}$ kg
- masse du proton : $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg
- rayon de Bohr : $a_B = 5,2919 \cdot 10^{-11}$ m
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m.s⁻¹
- perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹
- permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,8542 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹
- constante de Planck : $h = 6,6261 \cdot 10^{-34}$ J.s
- constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ J.s
- constante énergétique de Rydberg : $R_y = \frac{m_e}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = 2,1799 \cdot 10^{-18}$ J
- l'électron-volt, unité d'énergie : $1 \text{ eV} = 1,6022 \cdot 10^{-19}$ J

On donne l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \text{ et l'expression de deux intégrales et leur valeur :}$$

- pour tout réel $r_0 > 0$: $\int_0^\infty r \exp(-r/r_0) dr = r_0^2$
- $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$.

Même si elles ne sont pas systématiquement rappelées dans l'énoncé, le candidat utilisera à son initiative dans cette liste toute constante qu'il jugera nécessaire pour répondre aux questions posées.

Les applications numériques demandées seront réalisées avec 4 chiffres significatifs pour les questions Q1 à Q17, puis avec 3 chiffres significatifs à partir de la question Q18.

Partie I – Modèle historique de Bohr de l'atome d'hydrogène (1913)

Dans le modèle planétaire de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron (vu comme ponctuel en M) tourne autour de son proton (lui aussi ponctuel et supposé immobile en O) en décrivant une orbite circulaire de rayon $r = OM$ (**figure 1**). On note $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire normal au plan de l'orbite.

L'électron est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) comme indiqué sur la **figure 1** et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est la base locale correspondante.

On néglige l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le proton.

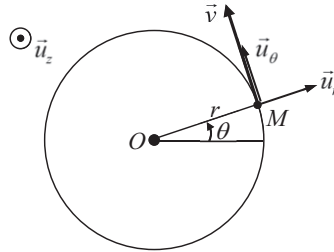


Figure 1 – Trajectoire circulaire de l'électron autour du proton supposé immobile

- Q1.** Rappeler l'expression de la force électrique exercée par le proton sur l'électron.
- Q2.** Par l'application du théorème de la quantité de mouvement, déduire la norme v de la vitesse de l'électron en fonction entre autres du rayon r de l'orbite.
- Q3.** Rappeler l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_p de l'électron. Montrer que l'énergie cinétique E_c de l'électron vérifie : $E_c = -E_p / 2$.
- Q4.** Exprimer la norme L du moment cinétique en O de l'électron en fonction de r , m_e , e , et ε_0 .

En 1913, Bohr a postulé que L est un multiple entier de $\hbar$ en posant $L = n\hbar$, où n est un entier naturel strictement positif et où $\hbar$ est la constante de Planck réduite. Pour de tels états du modèle de Bohr, dits stationnaires, l'électron, en mouvement circulaire uniforme, bien qu'accélééré, ne rayonne pas d'énergie.

- Q5.** De l'égalité $L = n\hbar$, déduire que la relation de quantification du rayon r_n de l'orbite caractérisée par l'entier n s'écrit sous la forme $r_n = a_B n^2$, avec a_B le rayon de Bohr, qu'on exprimera en fonction de m_e , e , ε_0 et $\hbar$.
- Q6.** En déduire que l'énergie mécanique E_n de l'électron vaut $E_n = -\frac{R_y}{n^2}$, avec R_y la constante énergétique de Rydberg.
- Q7.** Quelle est la signification du rayon de Bohr ?
Donner la valeur de a_B en picomètres et celle de R_y en électron-volts.

CCP Physique MP 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Louis Salkin (professeur en CPGE) ; il a été relu par Henri Lastakowski (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce problème est consacré à l'atome d'hydrogène, premier élément de la classification périodique, et aux développements historiques qui ont permis de modéliser progressivement ses niveaux d'énergie. Il est composé de sept parties quasiment indépendantes.

- La première partie présente le modèle planétaire de Bohr de l'atome d'hydrogène et permet d'en retrouver les principaux résultats.
- Dans la deuxième partie, on propose une approche quantique simplifiée du mouvement de l'électron. L'équation de Schrödinger conduit alors aux mêmes relations de quantification que celles trouvées dans le cadre du modèle de Bohr.
- La troisième partie, très courte, permet de faire le lien entre les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène et son spectre de raies.
- Dans la quatrième partie, la prise en compte des effets relativistes, que l'on doit à Sommerfeld, prolonge le modèle de Bohr en faisant intervenir un second nombre quantique, qui explique l'apparition de multiplets de raies.
- Dans la continuité de la partie précédente, la cinquième partie est dédiée à une méthode de résolution d'un doublet à l'aide d'un interféromètre de Michelson. La mesure des positions successives du miroir mobile conduisant à un brouillage des interférences permet d'en déduire l'écart spectral du doublet. On s'intéresse ensuite à l'expérience réalisée par Michelson et Morley en 1887.
- Dans la sixième partie, on étudie les effets de l'interaction entre le moment magnétique de spin de l'électron, propriété intrinsèquement quantique, et le champ magnétique du proton. Cette interaction spin-orbite conduit à l'introduction d'un nouveau nombre quantique et à la levée de dégénérescence des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.
- Enfin, la septième partie propose une approche documentaire autour de la structure hyperfine du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène, et son application à des fins de communication avec une éventuelle intelligence extraterrestre.

Ce problème, très intéressant sur le plan historique, est de difficulté croissante. Partant du classique modèle de Bohr, il s'achève sur une analyse documentaire, en adéquation avec l'esprit du programme, comportant des questions volontairement moins guidées. Ce sujet permet de réviser la mécanique (classique et quantique) et l'optique ondulatoire.

INDICATIONS

Partie I

- 8 Comparer numériquement v_1 et c , et conclure sur le caractère éventuellement relativiste de l'électron.

Partie II

- 12 La fonction $\kappa(\vec{r})$ ne dépendant que de la variable θ , son laplacien s'écrit

$$\Delta\kappa = \frac{1}{R^2} \frac{d^2\kappa}{d\theta^2}$$

Partie IV

- 18 Montrer qu'à n fixé, l'énergie croît avec le nombre quantique ℓ .

Partie V

- 22 Pour faciliter le tracé de rayons, placer le point S' , image de S par L_s , puis les points S_2 et S_1 , images respectives de S' par rapport aux miroirs réel M_2 et fictif M'_1 (M'_1 est l'image de M_1 par L_s).
- 27 On observe un phénomène de brouillage lorsque les interférences constructives d'une longueur d'onde du doublet sont confondues avec les interférences destructives de l'autre.
- 29 Compter, sur chaque bras de l'interféromètre, le nombre de demi-diagonales de la table parcourues par le rayon lumineux entre le verre semi-argenté et le miroir.

Partie VI

- 31 Exprimer l'intensité du courant résultant du mouvement circulaire du proton autour de l'électron, puis utiliser la formule du champ magnétique créé par une spire circulaire en son centre.
- 33 L'énoncé fait allusion à l'expérience de Stern et Gerlach.

Partie VII

- 37 Se souvenir que le moment magnétique d'une spire s'écrit $IS\vec{n}$, avec I l'intensité qui la parcourt et S sa surface.
- 38 Déterminer le champ magnétique du proton à l'aide du document 1, puis calculer l'énergie potentielle de l'électron dans le champ magnétique du proton par la formule donnée à la question 32. Distinguer les configurations où les moments magnétiques du proton et de l'électron sont parallèles et antiparallèles. Calculer finalement la différence d'énergie entre ces deux états.
- 40 Comment est définie la seconde aujourd'hui ?

QUESTIONNEMENTS ET DÉCOUVERTES AUTOUR DE L'ATOME LE PLUS SIMPLE DE L'UNIVERS

- 1** Le proton, de charge $+e$, exerce sur l'électron de charge $-e$ la force de Coulomb

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

- 2** Le mouvement de l'électron étant circulaire, sa vitesse s'écrit

$$\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

et son accélération $\vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r + \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta$

En se plaçant dans le référentiel du proton supposé galiléen, appliquons à l'électron la 2^e loi de Newton projetée selon $\vec{u}_r$:

$$-m_e \frac{v^2}{r} = -\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

d'où

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi \varepsilon_0 m_e r}}$$

La norme de la vitesse de l'électron étant indépendante du temps, son mouvement est uniforme. Cette propriété pouvait d'ailleurs être déduite de la projection de la 2^e loi de Newton selon $\vec{u}_\theta$:

$$m_e \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad v = C^{\text{te}}$$

- 3** L'énergie potentielle de l'électron associée à la force $\vec{F}$ s'écrit, à une constante additive près,

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

Pour retrouver cette expression, repartons de la relation

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} dr$$

soit
$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

L'intégration selon r conduit au résultat.

L'énergie cinétique de l'électron est donnée par

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m_e v^2 \\ &= \frac{1}{2} m_e \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 m_e r} \end{aligned} \quad (\text{d'après la question 2})$$

soit

$$E_c = -\frac{E_p}{2}$$

- 4** Par définition, le moment cinétique de l'électron par rapport au point O est

$$\vec{L} = \vec{OM} \wedge (m_e \vec{v})$$

Les vecteurs $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ et $\vec{v} = v \vec{e}_\theta$ étant à tout instant orthogonaux, la norme du moment cinétique s'écrit $L = m_e r v$. Avec la question 2,

$$L = e \sqrt{\frac{m_e r}{4\pi \varepsilon_0}}$$

- 5** Injectons ce résultat dans la relation de quantification de Bohr :

$$e \sqrt{\frac{m_e r_n}{4\pi \varepsilon_0}} = n \hbar$$

Il vient

$$r_n = a_B n^2 \quad \text{avec} \quad a_B = \frac{4\pi \varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$$

- 6** Écrivons l'énergie mécanique de l'électron :

$$\begin{aligned} E &= E_c + E_p \\ &= -\frac{E_p}{2} + E_p \quad (\text{en utilisant la question 3}) \end{aligned}$$

ainsi

$$E = -\frac{e^2}{8\pi \varepsilon_0 r}$$

Rappelons que si l'énergie cinétique est nécessairement positive (ou nulle), l'énergie mécanique est algébrique. Le fait qu'elle soit ici négative est la signature de l'état lié de l'électron dans le champ de force créé par le noyau.

Injectons la relation de quantification du rayon obtenue à la question précédente :

$$E_n = -\frac{R_y}{n^2} \quad \text{avec} \quad R_y = \frac{e^2}{8\pi \varepsilon_0 a_B} = \frac{m_e}{2 \hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \right)^2$$

Cette expression est conforme à l'expression de R_y donnée dans le formulaire.

- 7** L'énoncé précisant que n est un entier strictement positif, le rayon de l'orbite de l'électron dans son état fondamental vérifie $r_1 = a_B$.

Le rayon de Bohr correspond au rayon de l'orbite électronique dans l'état de plus basse énergie.

D'après le formulaire,

$$a_B = 52,92 \text{ pm}$$

Avec $1 \text{ eV} = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ J}$,

$$R_y = 13,61 \text{ eV}$$

- 8** Exprimons l'énergie mécanique en fonction de l'énergie cinétique uniquement :

$$E_n = E_c + E_p = -E_c \quad (\text{par la question 3})$$

L'application de la règle de quantification de Bohr conduit à

$$-\frac{R_y}{n^2} = -\frac{1}{2} m_e v_n^2$$

CCP Physique et Chimie MP 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Augustin Long (ENS Lyon) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE), Louis Salkin (professeur en CPGE) et Alexandre Herault (professeur en CPGE).

Ce sujet aborde quelques aspects d'un voyage vers la Lune, du projet de lancement d'une fusée aux conditions nécessaires à la vie sur la Lune. Ses trois parties sont indépendantes.

- La première partie est consacrée aux interactions gravitationnelles entre la Terre et la Lune, qui sont responsables de la synchronisation des rotations de ces deux corps par les effets de marées. On s'intéresse ensuite à la mesure de la distance Terre-Lune par télémétrie laser et aux perturbations causées par l'atmosphère.
- La courte deuxième partie détaille le fonctionnement thermodynamique d'un moteur de fusée.
- Enfin, on étudie la composition du sol lunaire ainsi que deux méthodes ayant pour objectif la synthèse de dioxygène. C'est l'occasion d'aborder des questions de chimie. Trois questions d'informatique terminent cette partie, deux portant sur les bases de données et une demandant de programmer en Python la création d'un graphique.

Ce sujet recouvre une partie importante du programme de physique en abordant des questions de mécanique, d'optique ondulatoire, de physique des plasmas, de thermodynamique. Les questions de chimie, portant essentiellement sur la cristallographie, la thermodynamique des réactions et l'électrolyse, sont très classiques et proches du cours, mais assez calculatoires. Notons également la présence d'un peu d'informatique dans cette épreuve. La plupart des questions sont assez proches du cours et le reste pose peu de difficultés. Les parties et sous-parties sont globalement indépendantes.

INDICATIONS

Partie I

- 10 Exprimer l'accélération de la Lune sur son orbite circulaire en coordonnées polaires, puis appliquer le théorème de la résultante cinétique pour en déduire V .
- 12 Utiliser le théorème du moment cinétique projeté sur $\vec{e}_z$.
- 13 Exprimer mathématiquement le fait que le moment cinétique $J\Omega_T + \sigma_L(T)$ est conservé.
- 14 Comment se transforme le vecteur d'onde lors d'une réflexion sur un miroir plan ? Comment se transforme-t-il alors à la suite de trois réflexions sur des miroirs plans orthogonaux entre eux ?
- 17 Exprimer l'équilibre hydrostatique de l'atmosphère.
- 18 Calculer le temps infinitésimal requis par un photon pour traverser l'atmosphère entre les altitudes z et $z + dz$, puis intégrer ce temps sur tout le trajet.
- 22 Partir de la relation donnée, appliquée au champ électrique $\vec{E}$.
- 23 Injecter l'expression complexe de $\vec{E}$ dans l'équation d'onde obtenue à la question précédente.

Partie II

- 28 Intégrer la seconde loi de Joule $dH = C_P dT$.
- 30 Exploiter l'expression de δW obtenue à la question 29 pour faire apparaître des termes en Pv dans l'expression du premier principe, puis associer ceux-ci à l'énergie interne pour faire intervenir les enthalpies.
- 31 Repartir de la relation donnée à la question précédente en négligeant c_e par rapport à c_s , et utiliser les résultats des questions 28 puis 27 pour transformer la formule.

Partie III

- 33 Écrire le système d'équations liant la masse molaire de chacun des isotopes et leurs proportions.
- 38 Donner la pression partielle en dioxygène sachant que sur Terre l'air est à la pression de 1 bar et contient 20 % de dioxygène.
- 40 Les contre-ions calcium et aluminium sont Ca^{2+} et Al^{3+} . La formule des ions silicate est SiO_4^{4-} .
- 42.c Calculer le nombre de générateurs nécessaires pour le séjour de 6 mois des 4 habitants.
- 45 Commencer par déterminer à quelles positions se trouvent les mesures correspondant à 8 et 13 heures dans la liste `flux`.

OBJECTIF LUNE

I. ON VISE LA LUNE

1 A priori, le champ électrique dans et autour de la sphère dépend des trois coordonnées d'espace (r, θ, φ) , et son vecteur directeur est quelconque. Or, pour un point quelconque M,

- Tout plan contenant M et le vecteur local $\vec{e}_r$ est un plan de symétrie de la distribution de charge. Le champ électrique est donc radial : $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_r$;
- Par invariance par rotation autour du centre de la sphère C, le module du champ est indépendant des angles θ et φ , soit $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.

Enfin, le théorème de Gauss appliqué à une boule $\mathcal{B}$ centrée sur C et de surface $\mathcal{S}$ permet d'établir que

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(r)$$

soit

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(r)$$

où $Q(r)$ est la charge comprise à l'intérieur de la boule $\mathcal{B}$. On a

$$Q(r) = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho & \text{si } r \leq R \\ Q & \text{si } r \geq R \end{cases} \quad \text{avec} \quad Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

soit, en fonction de Q ,

$$Q(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{R}\right)^3 Q & \text{si } r \leq R \\ Q & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Finalement,

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{Q r}{4\pi \varepsilon_0 R^3} \vec{e}_r & \text{si } r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

2 Les forces gravitationnelles et électrostatiques qui s'exercent entre ces deux particules s'expriment toutes deux de manière analogue :

$$\vec{F}_g = -\frac{\mathcal{G} m m'}{PP'^2} \frac{\vec{PP}'}{PP'} \quad \text{et} \quad \vec{F}_e = \frac{q q'}{4\pi \varepsilon_0 PP'^2} \frac{\vec{PP}'}{PP'}$$

Les sens des forces exercées par P sur P', deux particules massiques portant des charges de même signe sont donc les suivants :

$$\begin{array}{ccc} \text{P} & & \text{P}' \\ \bullet & \xleftarrow{\vec{F}_g} \bullet & \xrightarrow{\vec{F}_e} \end{array}$$

3.a Par analogie avec l'électrostatique, on peut établir le théorème de Gauss pour la gravitation en choisissant une surface de Gauss quelconque $\mathcal{S}$ entourant un volume $\mathcal{V}$ et une distribution volumique de masse ρ :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S} = -4\pi \mathcal{G} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = -4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}}$$

Comme dans le cas de l'électrostatique, une distribution à symétrie sphérique est donc équivalente, de l'extérieur de celle-ci, à **une particule massive ponctuelle au centre de la distribution et portant la masse totale de celle-ci**.

3.b Par absence de direction privilégiée, le **champ de gravitation** $\vec{G}(C)$ est nul **en son centre**. Par analogie avec la situation électrostatique traitée à la question 1 dans le cas $r \geq R$, on peut établir que

$$\vec{G}(M) = -\frac{\mathcal{G} m}{CM^2} \frac{\vec{CM}}{CM}$$

3.c Sur Terre, $g_T = G_T(R_T) = \frac{\mathcal{G} m_T}{R_T^2} = 9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Sur la Lune, $g_L = G_L(R_L) = \frac{\mathcal{G} m_L}{R_L^2} = 1,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

L'intensité du champ gravitationnel à la surface de la Lune est donc **environ un sixième de celle du champ terrestre**.

4 Le référentiel de Copernic est le **référentiel centré sur le centre de masse du Système solaire et dont les axes sont fixes par rapport à des étoiles éloignées**. Le référentiel géocentrique est celui **centré sur la Terre et qui partage les axes du référentiel de Copernic**. Enfin, le référentiel terrestre a la **même origine que le référentiel géocentrique mais ses axes sont attachés à la surface de la Terre**.

Le référentiel de Copernic est considéré galiléen sur des durées négligeables devant la constante de temps de mouvement du Système solaire dans la galaxie, qui est de l'ordre de plusieurs centaines de millions d'années. C'est donc le cas pour la plupart des applications humaines.

5 La Terre effectue une rotation (sur elle-même) de 2π radians en une durée proche d'une journée, soit environ $8,6 \cdot 10^4 \text{ s}$. On s'attend donc bien à une **vitesse de rotation propre de l'ordre de $7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$** .

6 D'après sa définition, le référentiel géocentrique ne peut être considéré galiléen qu'au cours d'expériences de **durée négligeable devant la période de révolution de la Terre** (autour du Soleil), soit un an.

Le phénomène de précession de l'axe de rotation de la Terre, dit de précession des équinoxes, de période 26 000 ans, ne pourrait être expliqué si le référentiel géocentrique était galiléen.

En astronomie, les termes de rotation et révolution ne sont pas interchangeables : on utilise le premier pour le mouvement d'un corps autour de son axe, et le second pour celui d'un corps autour d'un autre astre autour duquel il orbite. Veiller à la précision du langage permet d'éviter des ambiguïtés.

Le référentiel terrestre peut être considéré galiléen sur des **durées négligeables devant la période de rotation de la Terre**, soit une journée.

L'expérience du pendule de Foucault, toujours en cours au Panthéon, est une célèbre démonstration du caractère non galiléen du référentiel terrestre.

7 Ce phénomène suppose une **égalité de la vitesse de rotation de la Lune, et de sa vitesse de révolution autour de la Terre**. On a donc

$$T_L = \frac{2\pi}{\Omega_L} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ s} = 27,3 \text{ jours}$$

Centrale Physique et Chimie 1 MP 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) et Vincent Wieczny (ENS Lyon) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm), Julien Dumont (professeur en CPGE), Augustin Long (ENS Lyon) et Alexandre Herault (professeur en CPGE).

Ce sujet étudie la couronne solaire. Ses cinq parties sont indépendantes.

- Dans la première partie, on s'intéresse à des méthodes pratiques pour mesurer la température de la couronne solaire. On construit un modèle mathématique de l'atmosphère solaire, puis on utilise le spectre de certains ions du fer pour estimer la température recherchée. Cette partie est constituée essentiellement de questions courtes et peu calculatoires utilisant les cours de thermodynamique et de mécanique de seconde année.
- Dans la deuxième partie, on cherche à calculer la densité volumique moyenne d'électrons dans la couronne solaire. Toutes les questions sauf deux sont proches du cours d'électromagnétisme.
- Le rayonnement radio de la couronne solaire est étudié dans la troisième partie. La majorité des questions reposent sur la propagation d'ondes dans les milieux dispersifs, en l'occurrence un plasma.
- La quatrième partie s'intéresse à l'évolution de la température de la couronne et au mouvement d'une sonde qui l'étudie. Dans un premier temps, on établit l'expression de cette température en fonction de la distance au centre du Soleil. On cherche ensuite le temps d'exposition de la sonde à des températures élevées lorsqu'elle s'approche du Soleil. Cette partie repose sur le cours de diffusion thermique et sur les forces centrales dans le cas elliptique.
- La dernière partie est consacrée à la chimie. Elle étudie l'hydrazine, qui est utilisée dans les moteurs à propulsion des sondes spatiales pour corriger la trajectoire. Trois thèmes sont abordés : une étude thermodynamique de la réaction de décomposition qui permet la formation des gaz de propulsion, une étude cinétique de la synthèse de l'hydrazine, puis un dosage de celle-ci pour vérifier sa pureté, paramètre essentiel pour son utilisation dans le domaine spatial.

L'épreuve comporte quelques calculs délicats. Pour le reste, elle est relativement proche du cours et fait appel à de nombreuses notions de première et seconde années : mécanique du point, thermodynamique et électromagnétisme, pour la physique ; thermochimie, cinétique et dosage, pour la chimie. Cela en fait un bon sujet de révision en fin d'année.

INDICATIONS

- 4 Appliquer le théorème de Gauss sur une surface sphérique de rayon $r \geq R_s$.
- 6 Tracer $\ln n_e = f(R_s/r)$.
- 10 Les zones les plus émissives sur les photos correspondent aux zones où la fraction massique de l'élément observé est la plus grande.
- 16 Évaluer $\vec{v} \cdot \vec{u}$ signifie que l'on regarde dans une seule des trois directions.
- 22 La puissance surfacique moyenne à travers une surface orthogonale à $\vec{u}_z$ est

$$I = \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{u}_z \rangle$$

- 23 Utiliser l'énergie cinétique moyenne pour déterminer la valeur de la vitesse des électrons dans le milieu en régime permanent.
- 25 Écrire le principe fondamental de la dynamique à l'électron pour déterminer l'accélération a .
- 26 Faire un bilan de puissance entre z et $z + dz$.
- 28 Sur une distance h , la densité volumique moyenne s'écrit

$$\bar{n}_e = \frac{1}{h} \int_0^h n_e(z) dz$$

- 38 La densité d'électrons de la ionosphère terrestre est plus faible que celle de la couronne solaire.
- 39 Partir de $\omega_p = \sqrt{e^2 n_{r(t)} / m_e \varepsilon_0}$ pour calculer la fréquence $f(t)$ puis df/dt . La vitesse des particules correspond à dr/dt .
- 42 Le flux $\Phi = 4\pi r^2 j(r)$ est conservé.
- 45 Appliquer la troisième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement elliptique.
- 46 Dans le cas du mouvement elliptique, l'énergie mécanique s'écrit

$$E_m = -\frac{G M_s m}{2a}$$

où a est le demi grand axe. Utiliser ensuite la conservation de l'énergie mécanique.

- 48 Montrer que la vitesse peut être considérée comme uniforme dans cette zone et que le point suit une trajectoire quasi-circulaire.
- 51 Appliquer la loi de Hess en remarquant que $N_{2(g)}$ et $H_{2(g)}$ correspondent à des états standard de référence.
- 52 Raisonner sur un cycle thermodynamique et effectuer un bilan enthalpique.
- 53 Raisonner sur l'influence de la variation de la température et de la pression au cours de la transformation.
- 55 Procéder à une régression linéaire en appliquant la méthode intégrale.
- 58 Déterminer la constante de vitesse apparente à la nouvelle température de travail.
- 59 Faire le lien entre les données cinétiques macroscopiques et la réalité microscopique de la transformation chimique.
- 62 Utiliser de la verrerie de précision.
- 65 La teneur massique de l'échantillon d'hydrazine s'exprime comme le rapport de la concentration massique en hydrazine de l'échantillon et la masse volumique de l'hydrazine liquide.

1 L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit à une constante près que l'on peut choisir nulle

$$E_p(z) = m g_s z$$

d'où

$$n_1(z) = n_0 e^{-z/H} \quad \text{avec} \quad H = \frac{k_B T}{m g_s}$$

2 Un atome d'hydrogène ionisé est constitué d'un proton. Le milieu est localement neutre, c'est-à-dire qu'il y a exactement un électron libre par atome d'hydrogène ionisé. La masse moyenne m de l'ensemble est donc

$$m = \frac{m_p + m_e}{2} \simeq \frac{m_p}{2}$$

3 Utilisons le rapport $n_1(z_2)/n_1(z_1)$ de valeur 10^{-3} :

$$10^{-3} = \frac{n_1(z_2)}{n_1(z_1)} = e^{-z_2/H}$$

Avec $z_2 = R_s$,

$$H = -\frac{R_s}{\ln(n_1(z_2)/n_1(z_1))} = 1,01 \cdot 10^8 \text{ m}$$

c'est-à-dire

$$T = \frac{m g_s H}{k_B} = 1,67 \cdot 10^6 \text{ K}$$

4 Utilisons le théorème de Gauss gravitationnel avec une surface de Gauss sphérique de rayon $r \geq R_s$, en notant M_{int} la masse intérieure à la surface de Gauss. Ainsi,

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

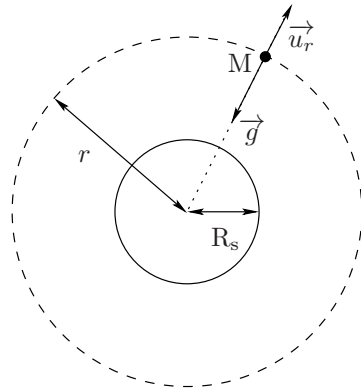
Pour $r \geq R_s$, $M_{\text{int}} = M_s$. De plus, $\vec{g} = -g(r) \vec{u}_r$.
Le théorème de Gauss devient

$$-4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M_s$$

c'est-à-dire
$$g(r) = \frac{G M_s}{r^2}$$

et, puisque $g(R_s) = g_s$,

$$g(r) = g_s \left(\frac{R_s}{r} \right)^2$$



5 La loi des gaz parfaits et la définition de ρ et n_2 fournissent respectivement

$$p(r) = n_2(r) k_B T \quad \text{et} \quad \rho(r) = m n_2(r)$$

L'équation d'équilibre de la pression donnée par l'énoncé devient

$$\frac{dn_2}{dr} = -\frac{m}{k_B T} n_2(r) g(r)$$

D'après la question 4,

$$\frac{dn_2}{dr} = -\frac{m g_s R_s^2}{k_B T} \frac{n_2(r)}{r^2}$$

On peut de nouveau introduire H obtenue à la question 1. Il vient

$$\frac{dn_2}{dr} = -\frac{R_s^2}{H} \frac{n_2(r)}{r^2}$$

Utilisons la méthode de séparation des variables :

$$\frac{dn_2}{n_2} = -\frac{R_s^2}{H} \frac{dr}{r^2}$$

Intégrons cette relation entre $r = R_s$ et r :

$$\int_{n'_0}^{n_2} \frac{dn_2}{n_2} = -\frac{R_s^2}{H} \int_{R_s}^r \frac{dr}{r^2}$$

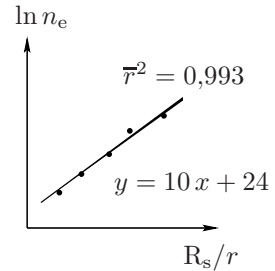
d'où
$$\ln\left(\frac{n_2}{n'_0}\right) = -\frac{R_s^2}{H} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R_s}\right) = \frac{R_s}{H} \left(\frac{R_s}{r} - 1\right)$$

Il vient

$$n_2(r) = n'_0 \exp\left[\frac{R_s}{H} \left(\frac{R_s}{r} - 1\right)\right]$$

6 Vérifions la loi précédente en traçant $\ln n_e = f(R_s/r)$. Le coefficient directeur de la droite est R_s/H . La courbe expérimentale est donnée ci-dessous. On a rajouté la régression linéaire en traits pleins. Le coefficient de régression $\bar{r}^2$ est très proche de 1 : **le modèle est pertinent**. De plus, avec la valeur du coefficient directeur, on obtient

$$H = \frac{R_s}{10} = 6,96 \cdot 10^7 \text{ m}$$



Ainsi,

$$T = \frac{m g_s H}{k_B} = 1,16 \cdot 10^6 \text{ K}$$

7 Le photon d'énergie hc/λ doit avoir une énergie suffisante pour ioniser l'ion FeXIII, c'est-à-dire E_1 . L'ionisation est donc possible si $E_1 \geq hc/\lambda$ soit

$$\lambda = \frac{hc}{E_1} = 3,49 \text{ nm}$$

Le photon incident appartient au domaine **des ultraviolets**.

Cette longueur d'onde est à la limite entre les domaines des ultraviolets et des rayons X. Cette seconde réponse était ainsi aussi acceptable.

8 L'électron suit la distribution statistique de Maxwell-Boltzmann. Son énergie cinétique moyenne s'écrit donc

$$E_{c,\text{moy}} = \frac{3}{2} k_B T$$

9 Les deux particules possèdent la même énergie cinétique moyenne. Par conséquent, l'ionisation est probable si $2E_{c,\text{moy}} = 3k_B T \geq E_1$ d'où

$$T = \frac{E_1}{3k_B} = 1,37 \cdot 10^6 \text{ K}$$

Centrale Physique et Chimie 2 MP 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre Monteiller (ENS Ulm) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

Ce sujet traite de quelques aspects de géophysique. Il s'intéresse à la mesure de grandeurs liées à la Terre, en particulier son champ gravitationnel et la résistivité électrique de ses sols. Les cinq parties du sujet sont largement indépendantes même si les quatre premières portent sur la gravitation.

- La première partie débute avec des questions de cours sur l'analogie entre électrostatique et gravitation. Puis, le sujet étudie des causes de variation de l'intensité du champ gravitationnel.
- La partie II traite de la mesure du champ gravitationnel par des systèmes oscillants. Elle est beaucoup moins guidée que les autres, il faut faire preuve d'initiative.
- La partie III étudie un système mécanique capable de mesurer avec précision le champ de pesanteur. Elle fait appel à des raisonnements énergétiques un peu calculatoires mais classiques.
- La partie IV permet d'appliquer les résultats précédents à l'analyse d'une anomalie gravimétrique due à l'enfouissement d'une masse dans le sol.
- La dernière partie analyse les propriétés électriques des sols.

Ce sujet permet de vérifier que les principaux concepts de l'électrostatique et de la mécanique du point sont compris. De plus, quelques questions font appel au sens physique et nécessitent de bien comprendre les systèmes et les phénomènes physiques considérés. C'est un sujet assez long, souvent proche du cours mais il contient plusieurs questions peu guidées qui le rendent difficile.

INDICATIONS

Partie I

2 Appliquer le théorème de Gauss à une sphère de rayon R .

3 Pour $x \ll 1$, $(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$

7 Si on appelle H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation, la force d'inertie d'entraînement appliquée à une masse m au point M s'exprime par

$$\vec{F}_{ie} = m \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

Partie II

10 La période T des oscillations d'un pendule simple s'exprime par

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

11 Comparer les valeurs des périodes d'oscillation à Cayenne et à Paris.

12 Utiliser
$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \ell}{\ell}\right)^2}$$

Partie III

16 L'énergie potentielle s'écrit à une constante près

$$E_p = \frac{1}{2} k (s - s_0)^2 - m g y_M$$

17 Exprimer s^2 en utilisant la relation de Chasles.

22 On rappelle que $\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$.

Partie IV

28 Appliquer le théorème de Gauss à une sphère de rayon $r > R$.

36 Faire en sorte que Δg soit indétectable en fonction de $\Delta \mu$.

Partie V

40 Utiliser la conservation du flux de $\vec{j}$ et calculer celui-ci à travers une demi-sphère de rayon r .

41 La loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \vec{E}/\rho$.

46 Les lignes de courant sont orthogonales aux équipotentielles.

GÉOPHYSIQUE DE LA PLANÈTE TERRE

1 Le théorème de Gauss stipule que

$$\oint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

avec M_{int} la masse contenue dans le volume défini par la surface Σ . On peut alors rassembler dans un tableau les analogies entre les forces électrique et gravitationnelle :

Électrostatique	Gravitation
$\vec{F}_{\text{elec}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 d^2} \vec{e}_r$	$\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{G m_1 m_2}{d^2} \vec{e}_r$
q	m
$\frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$	$-G$

2 Tout plan passant par M contenant le vecteur $\vec{e}_r$ est plan de symétrie de la distribution de masse. D'où

$$\vec{g}_T = \mathcal{G}_T(M) \vec{e}_r$$

De plus, la distribution de masse est à symétrie sphérique donc

$$\mathcal{G}_T(M) = \mathcal{G}_T(r)$$

Appliquons ensuite le théorème de Gauss gravitationnel, avec Σ une sphère de rayon $r > R_T$ et de centre C. La masse intérieure à cette sphère vaut M_T . Or,

$$\oint_{\Sigma} \vec{g}_T \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \mathcal{G}_T(r)$$

d'où

$$4\pi r^2 \mathcal{G}_T(r) = -4\pi G M_T$$

donc

$$\mathcal{G}_T(r) = -\frac{G M_T}{r^2}$$

Avec $r = R_T + z$,

$$\vec{g}_T = -\frac{G M_T}{(R_T + z)^2} \vec{e}_r$$

3 D'après la question précédente, la norme du champ gravitationnel s'écrit

$$\mathcal{G}_T(z) = \frac{G M_T}{R_T^2} \frac{1}{(1 + z/R_T)^2}$$

Ici, $z \ll R_T$. Avec le développement limité $(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$, il vient

$$\mathcal{G}_T(z) \simeq \frac{G M_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T} \right)$$

- 4** L'altitude z cherchée vérifie la relation suivante

$$\mathcal{G}_T(z) = 0,99 \mathcal{G}_T(0)$$

On injecte la forme de $\mathcal{G}_T(z)$ trouvée à la question précédente pour obtenir

$$\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right) = 0,99 \frac{GM_T}{R_T^2}$$

d'où
$$0,01 = \frac{2z}{R_T}$$

Finalement

$$z = 0,005 \times R_T = 3,19 \cdot 10^4 \text{ m}$$

- 5** Le gradient vertical du champ gravitationnel s'écrit, dans l'approximation $z \ll R_T$

$$\frac{d\mathcal{G}_T}{dz} = -\frac{2GM_T}{R_T^3}$$

Il correspond à la variation de l'intensité de $\mathcal{G}_T$ par unité de hauteur, c'est-à-dire à la déviation par unité d'altitude de la valeur de g_0 à la surface de la Terre.

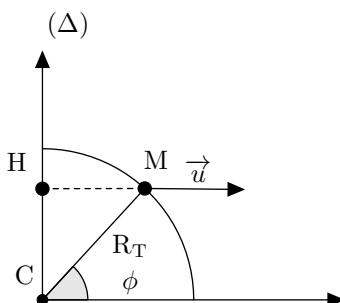
- 6** Numériquement,

$$\left| \frac{d\mathcal{G}_T}{dz} \right| = 3,08 \mu\text{Gal.cm}^{-1}$$

La variation relative de l'intensité du champ de pesanteur est faible : on peut donc considérer la pesanteur **uniforme** au voisinage de la Terre.

- 7** On appelle H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation Δ . On peut alors exprimer la force d'inertie d'entraînement comme

$$\vec{F}_{ie} = m \omega^2 \overrightarrow{HM} = m \omega^2 R_T \cos \phi \vec{u}$$

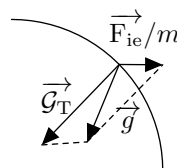


- 8** Le champ de pesanteur est défini par la relation suivante

$$m \vec{g} = \vec{F}_{ie} + m \vec{\mathcal{G}}_T(R_T)$$

d'où

$$\vec{g} = \omega^2 R_T \cos \phi \vec{u} - \frac{GM_T}{R_T^2} \vec{e}_r$$



On peut dès lors représenter le champ de pesanteur apparent comme sur la figure ci-contre.

Mines Physique 1 MP 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Raphaël Galicher (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Stéphane Ravier (professeur en CPGE) et Tom Morel (professeur en CPGE).

Le sujet s'appuie sur quatre documents fournis en annexe. Il s'intéresse à l'interaction entre un faisceau laser de forte puissance et la matière, un gaz dans les deux premières parties, un solide dans la troisième, conduisant à la formation d'un plasma.

- Au début de la première partie, une description semi-classique de l'atome est utilisée pour estimer l'amplitude du champ électrique laser nécessaire pour ioniser un gaz d'hydrogène. Puis une étude indépendante de cette ionisation est faite en considérant l'énergie potentielle d'un électron d'un atome d'hydrogène plongé dans un champ laser. Ensuite, le mouvement de l'électron après ionisation est décrit par la mécanique classique. Enfin, un modèle est proposé pour expliquer l'émission d'impulsions brèves par l'électron ainsi que les composantes du spectre émis.
- La deuxième partie du sujet commence par le calcul classique de la pulsation propre d'un plasma. Puis on établit la relation de dispersion pour une onde électromagnétique plane se propageant dans le plasma en faisant apparaître une fréquence de coupure. Les conditions de continuité du champ électrique à l'interface entre deux milieux permettent alors d'expliquer la réflexion sur le « miroir plasma ». La fin de cette partie étudie l'émission cohérente de sillage.
- Au début de la troisième partie, on montre que le plasma peut être considéré comme un gaz parfait sous certaines conditions. La conservation du nombre de particules dans le plasma permet d'estimer la pulsation plasma maximale. Deux modèles sont alors proposés pour expliquer les mesures expérimentales et l'énoncé demande de conclure quant à leur validité.

Le sujet est de difficulté hétérogène. Certaines questions sont proches du cours, d'autres sont compliquées. Dans certaines questions, la complexité vient d'un manque de clarté de l'énoncé. Ce sujet est un bon entraînement pour se rappeler le modèle semi-classique de l'atome d'hydrogène et la propagation d'onde dans un plasma.

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique était interdit pendant l'épreuve. Il fallait donc faire les applications numériques à la main. Dans ce corrigé, on détaille les applications numériques en suivant toujours la même méthode. Dans un premier temps, on simplifie autant que possible sans approximation (le signe $=$ est conservé). Dans un deuxième temps, on utilise des approximations pour finaliser le calcul (et on utilise le signe $\simeq$).

INDICATIONS

Partie I

- 2 L'expression de v peut s'obtenir à partir du principe fondamental de la dynamique. Pour montrer que $r = a_0 n^2$, utiliser la quantification du moment cinétique.
- 3 La question peut prêter à confusion : les calculs de E_C et de P sont indépendants.
- 6 Une force est conservative si elle ne dépend pas de la vitesse de déplacement.
- 7 Les deux instants privilégiés sont ceux pour lesquels la barrière de potentiel est au plus bas. Pour le calcul de $E_{f,i}$, remarquer qu'aux instants privilégiés, W_p et $W_{p,las}$ sont égaux. Utiliser l'expression de W_0 obtenue à la question 2.
- 8 Pour trouver la condition a posteriori, chercher la condition pour que l'amplitude du mouvement soit grande devant x_0 .
- 9 Remplacer $\omega_0 t_i$ par les valeurs trouvées à la question 7.
- 10 Penser à la décomposition en série de Fourier.

Partie II

- 11 Modéliser le problème par un condensateur ou supposer que $|X| \ll L$ et que les charges créent une densité surfacique de charges.
- 13 Utiliser le profil de densité du document III.
- 14 À l'interface entre deux milieux, il y a continuité de la composante du champ électrique parallèle à la surface.
- 15 Remplacer la pulsation plasma par l'expression donnée au II.A.
- 16 Comparer l'instant auquel l'émission a lieu en un point x et l'instant auquel le paquet d'onde arrive au même point.
- 17 Utiliser la définition d'une surface d'onde (appelée front d'onde dans l'énoncé).

Partie III

- 18 Dans un gaz parfait, l'énergie potentielle d'interaction entre particules est nulle. La variation d'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température.
- 19 Utiliser la conservation du nombre de particules.
- 20 Remplacer L par son expression en fonction de θ_e dans le résultat de la question 19.
- 21 Montrer que $L^2 \delta = L_0^2 \delta_0$. Utiliser le résultat de la question 19. Chercher les domaines de validité des deux modèles.

INTERACTION LASER PLASMA À HAUT ÉCLAIREMENT

I. GÉNÉRATION D'HARMONIQUES DANS LES GAZ

1 La force électrique coulombienne $\vec{f}$ subie par l'électron, due au proton, s'écrit

$$\vec{f} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

avec $\hat{u}_r = \vec{r}/r$ le vecteur unitaire radial.

Cette force est à tout instant dirigée selon $\hat{u}_r$, donc vers le proton qui est le centre de force. De plus, elle ne dépend que de la variable r ce qui permet de l'écrire comme la dérivée d'une énergie potentielle W_p :

$$\vec{f} = -\vec{\text{grad}} W_p \quad \text{avec} \quad W_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

La constante d'intégration a été choisie nulle.

2 L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$$W_m = \frac{1}{2} m v^2 + W_p$$

Comme la force est centrale et que l'électron est animé d'un mouvement circulaire de vitesse v et de rayon r , le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe radial s'écrit

$$-\frac{m v^2}{r} = \vec{f} \cdot \hat{u}_r$$

d'où

$$-\frac{1}{2} m v^2 = \frac{r}{2} \vec{f} \cdot \hat{u}_r$$

et

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Ainsi, l'énergie cinétique est égale à la moitié de l'énergie potentielle en norme et elle est de signe opposé. On en déduit l'expression de l'énergie mécanique.

$$W_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Pour obtenir l'expression du rayon r , on élève au carré la quantification du moment cinétique donnée par l'énoncé

$$m^2 r^2 v^2 = n^2 \hbar^2$$

D'après l'expression de l'énergie cinétique obtenue précédemment

$$m r^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = n^2 \hbar^2$$

Avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$,

$$r = n^2 a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

Lorsque l'électron est dans son état fondamental, on a $n = 1$ et l'énergie mécanique W_m est obtenue en remplaçant r par a_0 . Dans l'application numérique, on divise par e , ce qui permet de convertir les joules en électronvolts.

$$W_m = -W_0 = -\frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} = \frac{9 \times 1,6^3}{8 \times 9^2 \times 4 \pi^2} \times 10^{-31-19 \times 3+12 \times 2+34 \times 2} \text{ V}$$

On simplifie autant que possible en remplaçant 1,6 par $16 \cdot 10^{-1}$

$$W_0 = 16 \times \frac{8}{9} \times \frac{10}{\pi^2}$$

Avec $\pi^2 \simeq 10$

$$W_0 \simeq 16 \times 0,89 \simeq 14 \text{ eV}$$

Finalement

$$W_m = -W_0 = -\frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \simeq -14 \text{ eV}$$

L'énoncé demande de ne donner que deux chiffres significatifs car il fournit des valeurs approchées de e , m , ε_0 et h pour simplifier les calculs sans calculatrice. En utilisant des valeurs plus précises, on trouverait $W_0 = 13,6 \text{ eV}$.

3 La norme du champ électrique coulombien E_C ressenti par l'électron dans son état fondamental est

$$E_C = \frac{e}{4 \pi \varepsilon_0 a_0^2} = \frac{16}{9 \pi} 10^{12} \simeq 5,7 \cdot 10^{11} \text{ V.m}^{-1}$$

La puissance P de l'impulsion laser dans le gaz est le rapport entre son énergie et sa durée. En utilisant les données du document I, on trouve

$$P = \frac{W_T}{T} = 20 \text{ GW}$$

De plus, la puissance est égale au produit de l'éclairement et de la surface S du faisceau. D'après l'expression de l'éclairement fournie par le document I,

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E^2 S$$

avec E l'amplitude du champ électrique. On en déduit :

$$E = \sqrt{\frac{2P}{\varepsilon_0 c S}} \quad (\star)$$

La puissance est conservée au cours de la propagation. Sa valeur est donc fixe.

Avant le passage à travers la lentille, le diamètre du faisceau est D et l'amplitude du champ est E_ℓ

$$E_\ell = \sqrt{\frac{8P}{\varepsilon_0 c \pi D^2}} = \sqrt{\frac{8 \times 20}{9 \times 3 \times \pi}} \times 10^{9+12-8+4}$$

On simplifie pour arriver à

$$E_\ell = \frac{4}{3} \times \sqrt{\frac{10}{3 \pi}} \times \sqrt{10} \times 10^8$$

On utilise $3 \pi \simeq 10$ et $\sqrt{10} \simeq 3,2$

$$E_\ell \simeq \frac{4}{3} \times \sqrt{10} \times 10^8 \simeq 4,3 \cdot 10^8 \text{ V.m}^{-1}$$

Finalement

$$E_\ell = \sqrt{\frac{8P}{\varepsilon_0 c \pi D^2}} \simeq 4,3 \cdot 10^8 \text{ V.m}^{-1}$$

Mines Physique 2 MP 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Amélie Gay (ENS Lyon); il a été relu par Pierre Monteiller (ENS Ulm) et Tom Morel (professeur en CPGE).

Ce problème s'intéresse à l'atome de deutérium, isotope stable de l'hydrogène, ainsi qu'à son noyau. Les trois parties sont indépendantes.

- La première partie porte sur la répartition du deutérium dans les océans terrestres. Il s'agit d'exploiter la proportion en nombre d'atomes de deutérium océanique ainsi que la composition de l'eau lourde et de l'eau semi-lourde par des raisonnements physiques.
- La deuxième partie propose, dans un premier temps, d'étudier les raies d'émission des atomes de deutérium et d'hydrogène à partir des énergies de l'électron. Dans un second temps, on étudie l'élargissement par l'agitation thermique des raies d'émission de l'hydrogène. Ceci permet de déterminer les conditions de séparation des raies d'émission des atomes de deutérium et d'hydrogène par spectroscopie. Cette partie exploite les changements de référentiel en mécanique classique et la thermodynamique statistique.
- La dernière partie s'intéresse à l'étude quantique des interactions à force centrale entre deux particules. Les résultats sont ensuite appliqués au cas du noyau de deutérium. Quasiment toutes les notions de la physique quantique au programme sont nécessaires pour traiter cette partie.

Ce sujet est de difficulté croissante. Il commence par de petits raisonnements physiques pour ensuite laisser place à des calculs de mécanique quantique qui occupent la moitié du sujet. Il permet aussi de s'entraîner à faire des calculs sans l'aide de la calculatrice puisqu'elle était interdite pendant l'épreuve.

INDICATIONS

- 3 Calculer les probabilités qu'un atome d'oxygène soit lié à un atome d'hydrogène ou à un atome de deutérium.
- 5 Utiliser la relation de Planck-Einstein.
- 6 Ne pas confondre λ_n (avec m'_e) avec λ_n (avec m_e) de la question 5.
- 8 Remarquer que les deux référentiels sont en translation.
- 9 Il s'agit d'une onde électromagnétique dans le vide.
- 10 La distribution de Boltzmann fait intervenir le rapport de l'énergie du système sur l'énergie thermique.
- 13 Un point d'inflexion est déterminé par une dérivée seconde nulle.
- 14 Le nombre d'atomes dont la composante V_x prend une valeur entre V_x et $V_x + dV_x$ est égal au nombre de pulsations comprises entre ω_{app} et $\omega_{\text{app}} + d\omega_{\text{app}}$.
- 17 Faire une séparation des variables pour avoir d'un côté une fonction de r et de l'autre une fonction de θ et φ . Les deux fonctions sont égales si elles sont constantes.
- 20 Même idée qu'à la question 17.
- 22 Faire le changement de variable $x = \cos \theta$ dans l'équation vérifiée par Θ .
- 24 Exprimer la continuité de ψ et de sa dérivée.
- 25 La première relation est issue des conditions de la question 24 et la seconde doit faire apparaître ρ par combinaison de k et K .
- 30 Trouver la valeur de Y associée à $V_0 = V_{\text{min}}$.
- 32 Faire un développement limité en $\pi/2$ de la relation obtenue à la question 25 à partir des conditions de continuité.
- 33 Ne pas oublier la conversion des eV en J.

ET POUR UN NEUTRON DE PLUS...

1 Plaçons-nous dans un volume d'eau représentatif de l'abondance naturelle de deutérium dans les océans et notons m_H et m_D respectivement les masses d'hydrogène et de deutérium. La proportion de deutérium dans l'hydrogène océanique P_D s'écrit

$$P_D = \frac{m_D}{m_D + m_H} \\ = \frac{m_n + m_p + m_e}{m_n + m_p + m_e + 6\,420(m_p + m_e)}$$

En utilisant les approximations proposées par l'énoncé, $m_p \simeq m_n$ et $m_e \ll m_p$,

$$P_D \simeq \frac{2}{6\,422} = \frac{1}{3\,211}$$

Pour l'application numérique, utilisons le fait que $100/32 \simeq 3,1$. D'où

$$P_D \simeq \frac{100}{32} \cdot 10^{-2-2} \simeq 0,03\%$$

2 La proportion en masse du deuton dans le deutérium P_d est, où m_d désigne la masse du deuton,

$$P_d = \frac{m_d}{m_D} = \frac{m_n + m_p}{m_n + m_p + m_e}$$

Avec $m_e \ll m_p, m_n$,

$$P_d \simeq 1$$

Le noyau contient quasiment toute la masse du deutérium comme pour l'hydrogène.

3 La proportion en molécules d'eau semi-lourde HDO dans les océans, $\mathcal{P}_{HDO}$, est la probabilité de trouver HDO dans l'océan. On suppose que **cette probabilité est seulement déterminée par la probabilité de trouver un atome d'hydrogène $\mathcal{P}_H$ ou un atome de deutérium $\mathcal{P}_D$ dans le milieu, c'est-à-dire qu'on néglige tous les phénomènes d'interaction entre les atomes et les molécules.** Donc,

$$\mathcal{P}_{HDO} = \mathcal{P}_H \times \mathcal{P}_D$$

Soit
$$\mathcal{P}_{HDO} = \frac{6\,420}{6\,421} \times \frac{1}{6\,421} \simeq \frac{1}{6\,421}$$

Or on sait, d'après la question 1, que $100/64 \simeq 1,6$. Ainsi,

$$\mathcal{P}_{HDO} \simeq \frac{100}{64} \cdot 10^{-2-2} \simeq 0,02\%$$

Appliquons le même raisonnement pour la proportion en molécules d'eau lourde D_2O dans les océans :

$$\mathcal{P}_{D_2O} = \mathcal{P}_D^2$$

D'où
$$\mathcal{P}_{D_2O} = \left(\frac{1}{6\,421}\right)^2$$

Or, d'après la question 3, $(100/64)^2 \simeq 1,6^2 \simeq 2,6$. D'où

$$\mathcal{P}_{D_2O} \simeq \left(\frac{100}{64}\right)^2 \cdot 10^{2 \times (-2-2)} \simeq 3 \cdot 10^{-8}$$

4 Comme applications industrielles, on peut citer :

- la fission nucléaire où l'eau lourde est utilisée comme agent de régulation des neutrons produits par la réaction ;
- la RMN du proton où elle est utilisée dans les solvants pour ne pas perturber la mesure.

5 D'après la relation de Planck-Einstein,

$$\Delta E_n = \frac{hc}{\lambda_n}$$

Avec pour $n > 2$,

$$\begin{aligned}\Delta E_n &= E_n - E_2 \\ &= -\frac{E_0}{2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lambda_n = \frac{2hc}{E_0} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)^{-1}$$

Calculons le préfacteur

$$\frac{2hc}{E_0} = \frac{2 \times 6,6 \times 3,0}{2 \times 13,6 \times 1,6} \cdot 10^{-34+8+19} \simeq 1 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

L'application numérique donne alors

$$\lambda_3 = \frac{36}{5} \cdot 10^{-7} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad \text{et} \quad \lambda_4 = \frac{16}{3} \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Ces deux longueurs d'onde appartiennent au **domaine du visible**.

La quantité 1 eV correspond à l'énergie électrostatique ($E_{\text{él}} = qV$) gagnée lorsqu'une unité de charge électrique e est déplacée entre deux points dont le potentiel électrostatique diffère d'un volt.

6 D'après la question précédente, il vient, en notant $\alpha = \frac{2hc (4\pi\epsilon_0)^2}{e^4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)^{-1}$,

$$\lambda_n = \alpha \frac{1 + m_e/m_p}{m_e} \quad \text{et} \quad \lambda'_n = \alpha \frac{1 + m_e/(m_p + m_n)}{m_e}$$

L'écart relatif entre les deux longueurs d'onde s'écrit donc

$$\delta = \left(\frac{m_e}{m_p + m_n} - \frac{m_e}{m_p} \right) \left(1 + \frac{m_e}{m_p} \right)^{-1}$$

Or $m_e \ll m_p$ et $m_n \simeq m_p$,

$$\delta \simeq -\frac{m_e}{\kappa m_p} \quad \text{avec} \quad \kappa = 2$$

Numériquement, avec $9,1/1,7 = 5,3$, on a

$$\delta \simeq -\frac{9,1}{2 \times 1,7} \cdot 10^{-31+27} \simeq -3 \cdot 10^{-4}$$

L'écart relatif entre les deux longueurs d'onde est extrêmement faible ce qui indique qu'il est **impossible de faire la différence entre le deutérium et l'hydrogène avec un spectromètre UV/visible de travaux pratiques**.

Mines Chimie MP 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Fabrice Maquère (professeur agrégé) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce problème s'intéresse au bioéthanol, qui est un carburant d'origine végétale. Son utilisation permet de ne pas puiser dans les ressources naturelles fossiles et limite la création de gaz à effet de serre. L'étude est divisée en cinq thèmes distincts.

- On commence par étudier de manière thermodynamique la formation anaérobie de l'éthanol, puis sa combustion dans l'air. On utilise les méthodes classiques telles que la loi de Hess et la calorimétrie.
- Dans un deuxième temps, ce sont les diagrammes potentiel-pH de l'éthanol et du manganèse qui sont étudiés. Les diagrammes sont donnés et l'on doit, comme souvent, déterminer les équations de quelques frontières ainsi qu'un potentiel standard.
- La troisième partie est l'étude d'un dosage de l'éthanol contenu dans un flacon de biocarburant. Il s'agit d'un dosage rédox en retour à l'aide des ions permanganate MnO_4^- . Les diagrammes potentiel-pH de la partie précédente sont utilisés pour déterminer les réactions mises en jeu.
- La quatrième partie aborde rapidement une pile à combustible utilisant le bioéthanol. On détermine les réactions aux électrodes ainsi que la tension à vide de la pile.
- On termine par deux questions autour du rhodium, catalyseur utilisé pour produire du dihydrogène à partir de bioéthanol. On utilise la structure cristalline du rhodium pour calculer son rayon atomique à partir de sa masse volumique donnée dans l'énoncé.

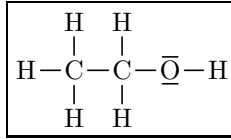
Thermodynamique et oxydoréduction sont les principaux outils utilisés dans ce problème. Les questions posées sont très classiques et les méthodes utilisées sont celles qui reviennent tous les ans dans les différentes épreuves de la filière MP. Ce sujet est de ce fait un excellent entraînement pour les sessions à venir. Les applications numériques sans calculatrice étaient parfois délicates dans ce problème, particulièrement le calcul final ; il convenait donc d'être habitué à calculer et à faire des approximations, même importantes.

INDICATIONS

- 1 La formule brute de l'éthanol peut s'écrire $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$. Penser aux doublets non liants, pour la représentation et pour les interactions intermoléculaires.
- 2 Le seul réactif est le glucose. Préciser les états physiques.
- 3 Utiliser la réaction de combustion pour déterminer l'enthalpie standard de formation du glucose.
- 4 La combustion forme de l'eau et du CO_2 . Penser à l'origine végétale et au mécanisme de photosynthèse pour évaluer le bilan carbone de cette combustion.
- 5 Il faut considérer que l'évolution du système se fait à pression constante et de manière adiabatique. On peut ne prendre en compte que le changement de température de l'eau, présente en grande quantité.
- 8 Il s'agit de la précipitation du solide $\text{Mn}(\text{OH})_{2(\text{s})}$. Se placer à l'apparition du premier cristal.
- 9 Sur les deux frontières considérées ici, on a égalité des concentrations.
- 10 Établir l'équation de la frontière puis lire graphiquement la valeur de E à $\text{pH} = 0$.
- 11 Attention, c'est la configuration du cation qui est demandée. Les électrons arrachés sont ceux qui sont le plus éloignés du noyau.
- 13 La réduction du permanganate va jusqu'au domaine (4) car le domaine (3) est encore disjoint de celui de l'éthanol.
- 14 Fe^{2+} s'oxyde en Fe^{3+} .
- 15 Combien de temps prend l'étape 3 ?
- 16 L'équivalence permet de déterminer l'excès de permanganate MnO_4^- . Connaisant la quantité totale ajoutée, on relie la quantité qui a réagi à n_2 .
- 17 Quelle est la forme du manganèse +II en milieu basique ?
- 18 Déterminer les couples en présence et écrire les demi-équations électroniques.
- 21 Il faut utiliser la relation entre e° , la tension à vide standard, et $\Delta_r G^\circ$.
- 23 Ne pas hésiter à faire des approximations grossières pour l'application numérique qui est très pénible sans calculatrice.

LE BIOÉTHANOL

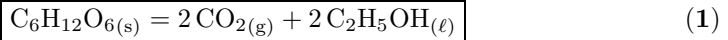
- 1** La structure de Lewis de l'éthanol, de formule brute $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$, est



On ne représente usuellement pas les atomes d'hydrogène, ni explicitement les atomes de carbone (représentation topologique), surtout pour les grosses molécules, mais dans une question demandant explicitement une structure de Lewis, il est nécessaire de bien détailler la formule développée, surtout pour une petite molécule. Attention à ne pas oublier les doublets non liants.

La formation de **liaisons hydrogène** entre l'eau et l'éthanol explique leur miscibilité. Ceci a pour conséquence que les carburants à base de mélange d'essence et d'éthanol sont probablement, au moins partiellement, miscibles avec l'eau.

- 2** La fermentation étant « anaérobie », elle ne consomme pas de dioxygène et son équation de réaction s'écrit, en notant $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ l'éthanol,



Il est très fortement conseillé, notamment pour les études thermodynamiques, de toujours noter les états physiques des constituants dans une équation de réaction.

- 3** D'après la loi de Hess,

$$\Delta_{\text{r}}H_1^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_{\text{f}}H_i^\circ = 2 \Delta_{\text{f}}H^\circ(\text{CO}_{2(\text{g})}) + 2 \Delta_{\text{f}}H^\circ(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}_{(\ell)}) - \Delta_{\text{f}}H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_{6(\text{s})})$$

Utilisons la combustion du glucose pour déterminer dans un premier temps l'enthalpie standard de formation $\Delta_{\text{f}}H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_{6(\text{s})})$:

$$\Delta_{\text{comb}}H^\circ = 6 \Delta_{\text{f}}H^\circ(\text{CO}_{2(\text{g})}) + 6 \Delta_{\text{f}}H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}) - \Delta_{\text{f}}H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_{6(\text{s})}) - 6 \Delta_{\text{f}}H^\circ(\text{O}_{2(\text{g})})$$

Numériquement, $\Delta_{\text{f}}H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_{6(\text{s})}) = -1\,000 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

Dans une épreuve sans calculatrice, il faut savoir conduire les calculs simples rapidement et ne pas hésiter à faire des approximations. On note en remarque les calculs simples qui nous permettent d'obtenir les résultats.

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{f}}H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_{6(\text{s})}) &= 2\,816 - 6 \times 394 - 6 \times 242 = 2\,816 - 6 \times 636 \\ &\approx 2\,800 - 3\,800 = -1\,000 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Il se trouve que le calcul exact est effectivement égal à $-1\,000$ mais le calcul rapide en ordre de grandeur doit être privilégié car c'est celui qui permet la meilleure efficacité dans une épreuve très courte, et c'est également le seul facile à conduire lorsque les calculs se compliquent.

On a alors pour la fermentation

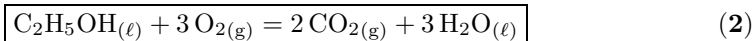
$$\Delta_{\text{r}}H_1^\circ = 2 \times (-394) + 2 \times (-277) + 1\,000 \approx -800 - 550 + 1\,000 \quad (\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1})$$

d'où

$$\Delta_{\text{r}}H_1^\circ \approx -350 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Comme $\Delta_{\text{r}}H_1^\circ < 0$, la réaction (1) est **exothermique**.

4 La combustion de l'éthanol, liquide à la température initiale, dans l'air s'écrit



Une réaction de combustion ne forme que du CO_2 et de l'eau, qui ici est encore liquide à la température finale.

On dit que le bioéthanol est un carburant propre car il ne provient pas des ressources fossiles. Il est issu de la fermentation du glucose, lui-même issu de sources végétales. Les végétaux ont absorbé du CO_2 lors du processus de photosynthèse. On dit que le bilan carbone est nul car le CO_2 produit lors de la combustion avait en fait été préalablement absorbé par les plantes. Il n'y a donc pas « création » de gaz à effet de serre, même si du CO_2 est effectivement produit lors de la combustion.

5 Pour résoudre cette question, on considère que la réaction est adiabatique et se déroule à pression constante.

L'énoncé utilise le terme de « bombe calorimétrique », ce qui signifie normalement que le système évolue à volume constant et non à pression constante. Il s'agit d'un manque important de précision de l'énoncé car le programme se limite aux évolutions à pression constante.

L'évolution se faisant à pression constante, la variation d'enthalpie du système est égale au transfert thermique :

$$\Delta H = Q_P$$

On suppose la transformation adiabatique en négligeant les transferts d'énergie avec le milieu extérieur :

$$Q_P = 0$$

On est donc dans une situation d'évolution isenthalpique et

$$\Delta H = 0$$

Comme H est une fonction d'état, sa variation ne dépend pas de la transformation. On choisit de décomposer cette transformation en deux étapes :

- la réaction à température et pression constantes, induisant la variation d'enthalpie

$$\Delta H_a = \int_0^\xi \Delta_r H d\xi \approx n_0 \Delta_r H_2^\circ$$

avec n_0 la quantité de matière initiale d'éthanol, d'expression

$$n_0 = \frac{m_0}{M} = \frac{3}{46} \approx \frac{3}{50} \approx 6.10^{-2} \text{ mol}$$

- la variation de température du système global, induisant la variation d'enthalpie

$$\Delta H_b = \int_{T_i}^{T_f} C_{P,\text{tot}} dT$$

avec $C_{P,\text{tot}}$ la capacité calorifique totale du système qui change de température. La quantité d'eau présente dans le calorimètre étant importante, on néglige tous les autres composants du système de sorte que

$$C_{P,\text{tot}} = C_{P,\text{eau}} = n_{\text{H}_2\text{O}} C_{P,m}^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\ell)})$$

avec $n_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{1000}{18} = 55 \text{ mol}$.

X/ENS Physique MP 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Amélie Gay (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce problème porte sur le dispositif de propulsion du lanceur Ariane 5.

- La première partie établit quelques relations générales concernant par exemple le nombre de Mach et l'expression de la célérité des ondes sonores dans un gaz en évolution adiabatique réversible. On montre notamment que l'écoulement à l'entrée de la tuyère est subsonique.
- Les deuxième, troisième et quatrième parties traitent des caractéristiques de l'écoulement en fonction de la section de la tuyère et du nombre de Mach. Le modèle proposé est progressivement complété. On manipule de nombreuses relations différentielles et il convient donc d'être ordonné pour ne pas perdre le fil du raisonnement.
- Dans une cinquième partie, on s'intéresse à l'adaptation en pression de la tuyère. Pour avoir un fonctionnement optimal, la pression intérieure à la sortie de la tuyère doit être égale à la pression extérieure de l'air. Ce fonctionnement impose des conditions sur le nombre de Mach et sur la température à la sortie de la tuyère. Cette partie reprend les résultats des parties précédentes pour déterminer analytiquement et numériquement ces grandeurs.
- La dernière partie est la seule à être totalement indépendante des autres. On étudie le mécanisme de combustion optimal des propulseurs de la fusée. Cette partie repose essentiellement sur des raisonnements qualitatifs.

Ce sujet de longueur raisonnable ne présente pas de difficulté insurmontable. Il mélange des questions calculatoires, qui ne nécessitent pas beaucoup de connaissances de cours, et des questions de compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. Il permet aussi de s'entraîner à faire des applications numériques en ordre de grandeur puisque les calculatrices étaient interdites pendant l'épreuve.

INDICATIONS

- 5 Pour une transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait,
- 6 Par définition, le débit massique à travers une section uniforme est $D = \rho v A$.
- 8 L'écoulement est stationnaire, ce qui implique la conservation du débit massique.
- 11 Raisonner sur le signe de dv/v en fonction de la valeur du nombre de Mach.
- 13 Reprendre le résultat de la question 5 et la définition du nombre de Mach.
- 14 Différentier logarithmiquement la loi de Laplace $P^{1-\gamma} T^\gamma = C^{\text{te}}$.
- 17 Utiliser la relation $dF/F = d(\ln F)$ et réunir les logarithmes.
- 23 Déterminer la constante de la relation $A f(M) = C^{\text{te}}$ en la calculant en $x = 0$.
- 27 Reprendre le raisonnement des questions 13 et 14 en faisant disparaître dv/v au profit de dT/T .
- 28 Injecter la loi de Laplace $P^{1-\gamma} T^\gamma = C^{\text{te}}$ dans le résultat de la question précédente.
- 29 Montrer que $\alpha M_0^2 \ll 1$.
- 36 Le débit massique de gaz éjecté est proportionnel à la surface instantanée de contact $S(t)$ entre le grain et le canal. Le grain se consommant, il faut analyser la surface de l'interface grain-canal en fonction du temps.
- 41 À $t = 0$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m_0 \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -m_0 g + F_p$$

Évaluer ensuite la dérivée grâce à la tangente à la courbe en $t = 0$.

ÉTUDE DU DISPOSITIF DE PROPULSION DU LANCEUR ARIANE 5

1 On peut vérifier que :

- la formule est homogène : un débit massique est en kg.s^{-1} , et v en m.s^{-1} donc Dv est bien en kg.m.s^{-2} , c'est-à-dire en newtons ;
- la relation est bien cohérente : la force d'éjection des gaz est opposée au mouvement et est d'autant plus importante que le débit de gaz éjecté est élevé.

2 La vapeur d'eau est assimilée à **un gaz parfait** et on suppose que le milieu extérieur est **homogène et isotrope**. Le théorème d'équipartition de l'énergie donne

$$E_{c,\text{moy}} = \frac{1}{2} m \langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Avec $k_B = R/\mathcal{N}_a$ et $M_{\text{H}_2\text{O}} = m \mathcal{N}_a$ où $\mathcal{N}_a$ est le nombre d'Avogadro,

$$\boxed{\langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3 R T}{M_{\text{H}_2\text{O}}} = 3 r T}$$

3 Prenons l'expression de la force de poussée de la question précédente avec $v_s = v_{\text{th}}$ et $D = \rho_0 A_0 v_{\text{th}}$:

$$F_{\text{th}} = \rho_0 A_0 v_{\text{th}}^2$$

D'après la question 2 et la loi des gaz parfaits $P_0 = r T \rho_0$,

$$\boxed{F_{\text{th}} = 3 P_0 A_0}$$

4 Numériquement,

$$\boxed{F_{\text{th}} = 6 \times 10^6 \text{ N}}$$

Comparons cette valeur au poids total de la fusée au décollage, qui est de $8 \times 10^6 \text{ N}$. La force de poussée est inférieure au poids de la fusée. Elle n'est donc pas suffisante pour la faire décoller.

5 L'évolution est adiabatique réversible. La vapeur d'eau est considérée comme un gaz parfait. On peut donc appliquer la loi de Laplace :

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = C^{\text{te}} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}$$

Calculons la célérité des ondes sonores c :

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{dP}{d\rho} \\ &= \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\gamma P}{\rho} \quad \text{avec } P = \frac{P_0 \rho^\gamma}{\rho_0^\gamma}$$

$$c^2 = \gamma r T$$

d'après la loi des gaz parfaits

Par conséquent,

$$\boxed{c = \sqrt{\gamma r T}}$$

6 À l'entrée de la tuyère, le débit massique s'écrit

$$D = \rho_0 v_0 A_0$$

La loi des gaz parfaits donne $\rho_0 = P_0/rT_0$, d'où

$$v_0 = \frac{r T_0 D}{P_0 A_0} = 2 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1}$$

7 D'après la question 6,

$$M_0 = \frac{v_0}{c_0} = 0,1$$

L'écoulement est donc **subsonique**.

8 L'écoulement est stationnaire. Il n'y a donc pas d'accumulation de matière ; le débit massique est alors conservé le long de la tuyère. Finalement,

$$\rho v A = C^{\text{te}}$$

9 Calculons la différentielle logarithmique de la relation précédente

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

La définition de c permet d'écrire $d\rho = dP/c^2$ et l'énoncé donne $\rho v dv = -dP$. On arrive donc à

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v dv}{c^2} = -M^2 \frac{dv}{v}$$

Injectons cette relation dans la première équation,

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dv}{v}$$

10 L'écoulement doit vérifier la relation $dv/v > 0$. Puisque $M_0 < 1$, d'après la question précédente, $dA/A < 0$: à l'entrée de la tuyère, la section doit diminuer.

La tuyère divergente n'est pas adaptée.

11 Pour une tuyère convergente-divergente, le signe de dA/A change. Dans la partie convergente (respectivement divergente), $dA/A < 0$ (respectivement $dA/A > 0$). Au niveau du col, on a $dA/A = 0$. D'après la question 9, deux cas sont à envisager :

- Si le nombre de Mach est toujours plus petit que 1 jusqu'au col, la vitesse augmente jusqu'au col ($dv/v > 0$) puis diminue jusqu'à la sortie ($dv/v < 0$) ;
- En revanche, si au niveau du col le nombre de Mach est égal à 1, dans la partie divergente ($dA/A < 0$), on a $dv/v > 0$. L'écoulement est donc accéléré tout le long de la tuyère.

La vitesse est toujours croissante si $M = 1$ au niveau du col.

Si l'écoulement a un nombre de Mach $M = 1$ avant le col, la vitesse diminue avant le col, ce qui n'a pas d'intérêt et peut même rendre l'écoulement subsonique après le col.

La valeur particulière $M = 1$ au col est donnée dans l'énoncé au niveau de la question 21.

X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2018

Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et Nicolas Courrier (professeur en CPGE) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE), Jérôme Didier (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

L'épreuve est constituée de deux grandes parties indépendantes.

La première s'intéresse à un fusible auto-réarmable. La résistance d'un tel composant peut augmenter fortement avec la température, ce qui protège un circuit en cas de surintensité. On commence par des questions relativement classiques et on termine par l'interprétation physique et la détermination graphique des résultats. Il faut prendre de la hauteur pour ne pas se perdre dans les notations.

- Dans un premier temps, les questions visent à établir les équations de fonctionnement du dipôle, mettant en œuvre des méthodes vues en diffusion de la chaleur et en électrocinétique.
- Ensuite, on s'intéresse au régime stationnaire pour une température du dipôle légèrement supérieure à la température extérieure. Le sujet se perd un peu dans des changements de variables qui brouillent le sens physique des équations.
- Enfin, le sujet aborde la stabilité du point de fonctionnement du dipôle, encore une fois à travers des développements autour de sa température moyenne. Le but final est de comprendre pourquoi ce dispositif peut protéger un circuit.

La seconde partie porte sur l'instabilité statique d'une membrane fine gonflée : le flambement. Ce phénomène, conduisant à la déformation de la membrane, est souvent destructeur lorsqu'une répartition d'efforts est imposée.

- La première sous-partie est une introduction à ce phénomène par analogie avec un ressort. C'est l'occasion d'aborder différents aspects du phénomène.
- La deuxième étude a pour but d'identifier les paramètres du problème simplifié vus dans la première sous-partie avec ceux de l'étude de la membrane.
- Le dernier point consiste à étudier l'asservissement du gonflage de la membrane. Ce problème est ramené à l'étude d'un remplissage d'un cylindre.

Cette partie est difficile par manque d'indications dans le sujet, notamment dans les deuxième et troisième sous-parties.

INDICATIONS

Partie I

- I.1 Pour négliger les effets de bords, il faut que le dispositif soit « grand ».
- I.2 Utiliser l'équation de conservation de la charge.
- I.4 La variation d'énergie dans une tranche infinitésimale de dipôle est due aux entrées et sorties de flux thermique et au chauffage par effet Joule.
- I.8 Intégrer l'équation de diffusion thermique sur tout le volume du dipôle.
- I.12 En partant de la densité J , effectuer des développements limités au premier ordre en ε pour simplifier l'écriture de K .
- I.16 Comparer les caractéristiques statiques à $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon > 0$, en les reliant, en fonction du type de générateur, à une augmentation ou diminution de puissance consommée.
- I.17 Effectuer un bilan d'énergie sur tout le dipôle, puisque sa température est uniforme. L'échauffement par effet Joule est contrebalancé par l'équilibre avec le milieu extérieur.
- I.18 Développer les expressions de R , I puis RI^2 au premier ordre en θ .
- I.24 Reprendre la définition de α , constante d'après l'énoncé.
- I.26 Il faut $F(T) = 0$ pour que la température se stabilise. Chercher alors l'égalité entre $Af(r)$ et $(T - T_e)$.
- I.27 Chercher la condition sur α pour que $F(T)$ soit encore positive lorsque $r = 1$.
- I.29 Quand U_G augmente, $Af(r)$ augmente également.

Partie II

- II.1 Exprimer l'énergie élastique.
- II.3 Exprimer le travail de la force et en déduire l'énergie potentielle.
- II.6 Penser au fait qu'il existe différentes situations d'équilibre.
- II.13 Exprimer au préalable les vecteurs $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{JN}$ ainsi que l'angle θ en fonction de ℓ et R . Cette étude est utile par la suite.
- II.15 Effectuer deux développements limités en supposant ℓ^2/R^2 petit devant 1, celui de $\sqrt{1 - \ell^2/R^2}$ doit être effectué à l'ordre 2.
- II.16 Utiliser le théorème de la résultante statique.
- II.22 Exprimer la variation de hauteur dans le réservoir grâce au principe de conservation de la matière.
- II.23 Attention à ne pas utiliser les équations de Laplace pour répondre à cette question car les conditions initiales sont non nulles.
- II.27 Remarquer que dans le cas où $h_c(t)$ est une constante, il est alors possible d'écrire

$$\frac{d[h(t) - h_c(t)]}{dt} = \frac{dh(t)}{dt}$$

I. ÉTUDE D'UN DISPOSITIF DE PROTECTION CONTRE LES SURINTENSITÉS

I.1 Si les dimensions selon (Oy) et (Oz) sont grandes devant a , les conditions aux limites étant les mêmes de part et d'autre de ces dimensions, alors on peut considérer que la température et le champ varient suffisamment peu pour les supposer invariants selon ces directions, orthogonales à (Ox) .

D'après les dimensions données dans la légende de la figure 1, on n'est pas vraiment dans ces conditions.

I.2 D'après la question I.1, I et J ne dépendent que de x et t . Dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, la conservation de la charge s'exprime

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad \text{soit ici} \quad \frac{\partial J}{\partial x} = \frac{1}{S} \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

Le courant I est indépendant de x .

I.3 Le dipôle est soumis à la température T_e en $x = -a$ et $x = a$. De plus, le plan (yOz) est un plan de symétrie géométrique. La densité de courant, source d'effet Joule, ne dépendant pas de x , on conclut que

La température T est symétrique par rapport au plan (yOz) .

Le plan (yOz) est un plan de symétrie géométrique et le dipôle est soumis à une différence de potentiel entre ses deux faces. Ainsi, le plan (yOz) est un plan d'antisymétrie du champ électrique.

Le champ $\vec{E}$ présente une répartition antisymétrique vis-à-vis du plan (yOz) .

I.4 Effectuons un bilan d'énergie entre les instants t et $t + dt$ sur une tranche de dipôle de volume $dV = S dx$. La variation d'énergie interne de cette tranche s'écrit

$$dU = c S dx [T(t + dt) - T(t)] = c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Notons J_Q la densité surfacique de courant thermique, $\Phi_Q(x)$ et $\Phi_Q(x + dx)$ les flux thermiques respectivement en x et $x + dx$. L'énergie qui entre en x vaut

$$\Phi_Q(x) dt = J_Q(x) S dt$$

et celle qui sort de la tranche, en $x + dx$,

$$\Phi_Q(x + dx) dt = J_Q(x + dx) S dt$$

Dans cette tranche, l'énergie électrique convertie en énergie thermique s'écrit

$$\vec{J} \cdot \vec{E} dV dt$$

Puisque $\vec{J} \cdot \vec{E} = J E$, en utilisant la loi d'Ohm locale $J = \sigma E$, on obtient

$$J E S dx dt = \frac{J^2}{\sigma} S dx dt$$

Le bilan d'énergie se met alors sous la forme

$$\begin{aligned} c \frac{\partial T}{\partial t} S dx dt &= J_Q(x) S dt - J_Q(x + dx) S dt + \frac{J^2}{\sigma} S dx dt \\ &= -\frac{\partial J_Q}{\partial x} S dx dt + \frac{J^2}{\sigma} S dx dt \end{aligned}$$

Utilisons à présent la loi de Fourier sur la diffusion thermique

$$J_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

pour établir l'équation différentielle vérifiée par la température

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{J^2}{\sigma}$$

I.5 Le potentiel électrique dérive du champ électrique selon

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{soit ici} \quad E = -\frac{dV}{dx}$$

La tension aux bornes du dipôle est définie d'après la loi d'Ohm locale selon

$$U = V_A - V_B = \int_B^A dV = -\int_B^A E dx = +\int_A^B E dx = \int_A^B \frac{J}{\sigma} dx$$

Avec $J = I/S$ uniforme, on a la loi d'Ohm pour ce dipôle :

$$U = \frac{I}{S} \int_{-a}^a \frac{1}{\sigma} dx$$

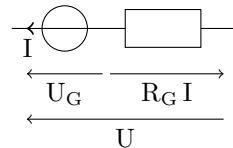
et, par définition de la résistance,

$$R = \frac{1}{S} \int_{-a}^a \frac{1}{\sigma} dx = \frac{2}{S} \int_0^a \frac{1}{\sigma} dx$$

| La conductivité σ n'étant pas uniforme, on ne peut pas écrire $\sigma = 2a/(S\sigma)$.

I.6 Le générateur est modélisé par une force électromotrice continue U_G et une résistance interne R_G . Son équation de fonctionnement est donc

$$U = U_G - R_G I$$



I.7 Par définition, $I = JS$ et d'après les questions I.5 et I.6,

$$U = RI = U_G - R_G I$$

donc

$$J = \frac{U_G}{S(R_G + R)}$$

I.8 La puissance électrique délivrée par le générateur vaut

$$UI = RI^2$$

L'équation différentielle vérifiée par la température écrite à la question I.4 met en œuvre des puissances volumiques. En régime stationnaire, la dérivée temporelle s'annule. Intégrons alors l'équation simplifiée sur tout le volume du dipôle :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-a}^a \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx S + \int_{-a}^a \frac{J^2}{\sigma} dx S \\ &= \lambda S \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=a} - \lambda S \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=-a} + (JS)^2 \frac{1}{S} \int_{-a}^a \frac{1}{\sigma} dx \end{aligned}$$